

UNIVERSITE DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
U. F. R. SCIENCES

ECOLE DOCTORALE
« SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUEES »

**Modélisation thermomécanique des procédés
de déformation plastique et de solidification**

Michel Bellet

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches
devant être soutenu le 8 juillet 2005
devant le jury composé de :

J.-L. Batoz	rapporteur
J.-L. Chenot	examineur
Y. Demay	examineur
J.-C. Gélín	rapporteur
M. Rappaz	examineur
M. Suéry	rapporteur

D'abord continuer, ensuite seulement commencer.

Jean Monnet,

initiateur de la construction de l'Union Européenne.

Sommaire

INTRODUCTION	1
1 FORMULATION ELEMENTS FINIS POUR MILIEUX PLASTIQUES COMPRESSIBLES. APPLICATION A LA SIMULATION DE LA COMPACTION DE POUDRES	3
2 LA SIMULATION DES PROCEDES DE SOUFFLAGE DE POLYMERES : DIFFERENTES APPROCHES MECANIKES, DIFFERENTS MODELES RHEOLOGIQUES	23
3 APPROCHE DES PHENOMENES THERMOMECHANIKES EN SOLIDIFICATION DES ALLIAGES METALLIQUES	61
3.1 Solveur mécanique	61
3.2 Solveur thermique.....	66
4 FORMULATION ALE POUR LA SOLIDIFICATION	69
4.1 ALE et solidification : une brève revue de la littérature	69
4.2 Formulation ALE dans R2SOL et THERCAST®	70
5 EXEMPLES D'APPLICATION DE LA FORMULATION THERMOMECHANIQUE EULERIENNE-LAGRANGIENNE	77
5.1 Remplissage de moules de fonderie	77
5.2 Solidification de grosses pièces avec suivi de surface libre et convection du liquide.....	83
5.3 Solidification des disques de frein : un exemple d'interaction thermomécanique forte entre pièce et moule	87
5.4 Thermomécanique de la coulée continue d'aciers.....	89
6 MODELISATION THERMOMECHANIQUE DE LA ZONE PATEUSE EN SOLIDIFICATION 101	
6.1 Approche de type milieu continu monophasé.....	101
6.2 Approche de type milieu continu biphasique avec milieu solide déformable	103
6.3 Modèle avec hypothèse de solide fixe non déformable.....	121
6.4 Exemples d'application.....	122
7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES	133
8 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	137

9	NOTATIONS.....	145
10	ANNEXE : FORME FAIBLE DU PROBLEME MECANIQUE EN DIPHASIQUE.....	149
11	SELECTION D'ARTICLES SUR LA MODELISATION DES PROCEDES DE SOLIDIFICATION	151
12	LISTE DES PUBLICATIONS.....	217
12.1	Publications dans des revues à comité de lecture	217
12.2	Publications dans d'autres revues.....	218
12.3	Conférences invitées.....	218
12.4	Livres (direction).....	219
12.5	Livres et cdroms (collaboration).....	219
12.6	Communications à des congrès, avec actes	219
12.7	Communications à des congrès, sans actes	224
12.8	Divers.....	225
12.9	Organisation de conférences, colloques et séminaires	225
13	TRAVAUX ENCADRES.....	226
13.1	Thèses	226
13.2	Mastères spécialisés.....	226

INTRODUCTION

La simulation numérique des procédés de transformation des matériaux est un domaine de recherche vaste et multidisciplinaire : il met en jeu essentiellement la thermomécanique des milieux continus, la science des matériaux et l'analyse numérique. Il s'agit de la thématique de recherche principale du groupe TMP (« Thermomécanique et Plasticité ») que je dirige au CEMEF. Au cours des quinze dernières années, j'ai eu l'occasion d'enrichir mes connaissances dans chacun de ces domaines. En effet, les travaux de recherche que j'ai dirigés ont porté sur la simulation numérique par la méthode des éléments finis des procédés suivants :

- la solidification des alliages métalliques (coulée en moule, ou continue) ;
- la compaction de poudres, principalement d'alliages métalliques ;
- le soufflage des polymères (thermoformage, injection-soufflage et extrusion-soufflage).

Les thématiques scientifiques rencontrées sont les suivantes :

- la thermique non linéaire et le couplage thermomécanique ;
- la résolution des équations de Navier-Stokes, instationnaires et à surface libre, avec modèle de turbulence ;
- la thermomécanique des milieux multiphasés ;
- le remaillage automatique et les méthodes eulériennes-lagrangiennes ;
- les algorithmes de contact ;
- la résolution incrémentale des équations de la plasticité compressible, ainsi que de la viscoélasticité.

Les deux premières parties de ce document présentent les travaux que j'ai dirigés en simulation des procédés de compaction des poudres d'une part, et de soufflage des polymères d'autre part. Dans les deux cas, je ne donne qu'un bref résumé des travaux, et je renvoie le lecteur à six articles sélectionnés, deux sur les poudres et quatre sur les polymères.

Dans ce document, j'ai choisi de mettre l'accent sur la modélisation des procédés de solidification, parce qu'elle a constitué ces dernières années l'essentiel de mon activité. En outre, cette thématique est un terrain d'application de toutes les thématiques scientifiques précédemment citées. En particulier, je présenterai les aspects relatifs à la simulation des phénomènes thermomécaniques en solidification (section 3) en insistant sur les formulations arbitrairement lagrangiennes-eulériennes, très utiles dans ce contexte (section 4). Je montrerai ensuite quelques exemples d'application de ces méthodes à la coulée de pièces en moule ainsi qu'à la coulée continue (section 5). Enfin, la modélisation effectivement biphasique du milieu semi-solide fera l'objet d'un développement détaillé (section 6).

1 FORMULATION ELEMENTS FINIS POUR MILIEUX PLASTIQUES COMPRESSIBLES. APPLICATION A LA SIMULATION DE LA COMPACTION DE POUDRES

Ce thème est illustré par deux articles dans les pages qui suivent. Je ne donne ici qu'un bref résumé de mon activité d'encadrement de travaux dans ce domaine.

La thèse de Gilles Coccoz (Coccoz, 1995) a porté sur l'étude du compactage à froid des poudres de fer, technologie utilisée pour réaliser de nombreuses pièces dans l'industrie automobile par exemple. La poudre est dans un premier temps compactée mécaniquement à froid, pour obtenir une ébauche de la pièce finale. Cette ébauche, ou « cru », contient encore des porosités qui sont éliminées en quasi totalité par la technique du frittage à chaud. La première étape de la compaction à froid est génératrice de nombreux défauts dont les ruptures après compaction, lors de l'éjection du « cru », ou les hétérogénéités de densité, responsables de défauts survenant lors du frittage. La simulation numérique est un outil important dans la maîtrise de la compaction à froid.

Les travaux de Gilles Coccoz se sont déroulés pour partie en Suède, à l'Université Technologique de Lulea (Prof. Karlsson), où de nombreux essais triaxiaux ont permis de constituer une base de données, utilisée ensuite au CEMEF pour identifier les paramètres d'une loi de comportement élasto-plastique compressible de type « Cam-clay modifié ». L'autre volet du travail a concerné la simulation numérique, pour laquelle le modèle de comportement a été intégré dans le logiciel FORGE2[®], nécessitant une attention particulière à la résolution incrémentale de la loi de comportement et au calcul du module tangent correspondant. La validation de l'implantation numérique a été effectuée en recalculant les essais triaxiaux effectués, puis le logiciel a été appliqué à quelques configurations industrielles telles que des compactions axisymétriques de roues dentées pour engrenages automobiles (voir la communication de Coccoz et al., 1994, ci-après).

L'étude de la compaction des poudres à chaud, initiée au laboratoire par les travaux de Marc Abouaf (1985), a été reprise en collaboration avec Ashoka Jinka lors de son séjour post-doctoral, dans une approche tridimensionnelle avec le logiciel FORGE3[®]. La loi de comportement viscoplastique compressible, découlant du potentiel elliptique de Shima & Oyane (1976), a ainsi été implantée en utilisant des éléments tétraèdres à 10 nœuds de type P2/P1 (Jinka et al., 1997), puis, postérieurement au séjour de Jinka, avec le mini-élément linéaire P1+/P1 à pression continue. Pour plus de détails, voir l'article (Bellet, 1999) ci-après.

Au laboratoire, ces travaux ont servi de base à ceux de Nicolas Renon, que je n'ai pas directement encadrés, et qui ont consisté à introduire différentes lois de comportement élasto-plastique compressible (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Cam-clay modifié) dans le logiciel FORGE3[®], afin de modéliser la déformation de sols (Renon, 2002).

D'autre part, ces travaux nous ont permis d'aborder un nouveau domaine : la modélisation de la déformation de la zone pâteuse pour un alliage métallique en condition de solidification. En effet, dans le cas d'une phase solide cohérente, celle-ci peut être assimilée à un milieu continu poreux et compressible saturé par une phase liquide en circulation à l'intérieur de cette porosité. Le comportement du milieu solide peut alors être modélisé par un modèle viscoplastique compressible, tandis que l'écoulement de la phase liquide peut être approché par une loi de Darcy, le milieu solide étant caractérisé par sa perméabilité. Ces travaux seront présentés en détail à la section 6.

On pourra regretter que ces travaux sur la simulation du compactage n'aient pas été poursuivis au laboratoire, la raison essentielle étant une demande faible pour une version commerciale du logiciel FORGE3[®] intégrant ces capacités. Aujourd'hui, l'engouement autour de la technologie du formage à grande

vitesse, appliqué entre autre à la compaction de poudres métalliques, semble réactiver la thématique dans la communauté universitaire et susciter le besoin côté industriel. L'expérience numérique accumulée au cours des travaux précédents pourrait servir de base à de futurs développements dans ce domaine. Sans plus détailler, il nous semble que les points critiques quant à l'utilisation des grandes vitesses sont d'une part l'identification des lois de comportement. La présence de couplages thermo-mécaniques très forts rend incontournable l'identification par analyse inverse basée sur la modélisation des essais par éléments finis, Les réalisations récentes du laboratoire dans ce domaine (Forestier et al., 2003) pourraient être appliquées et perfectionnées. Enfin, les forts gradients locaux, inhérents aux procédés à grande vitesse nécessitent le perfectionnement des modules de remaillage dynamique en incluant adaptativité et anisotropie.

*Formulation éléments finis pour milieux plastiques compressibles.
Application à la simulation de la compaction de poudres*

Pour illustrer la thématique « poudres », j'ai choisi ci-après une communication, qui bien que courte, illustre le travail d'identification rhéologique et de modélisation bidimensionnelle appliquées à l'étude de la compaction à froid (thèse de Gilles Coccoz), ainsi qu'un article centré sur la modélisation tridimensionnelle du forgeage-compaction à chaud.

Cold compaction of powder: experiments and simulation

Gilles COCCOZ, Michel BELLET, Romain LECOT,
Luc ACKERMANN, Hans Ake HAGGBLAD

Proc. PM'94, 1994 Powder Metallurgy World Congress, Paris, 6-9 juin 1994, Société Française de Métallurgie et de Matériaux et European Powder Metallurgy Association (eds.), Les Editions de Physique, vol. 1 (1994) 709-712

Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation. Application to metal powder hot compaction

Michel BELLET

Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 175 (1999) 19-40

2 LA SIMULATION DES PROCÉDES DE SOUFFLAGE DE POLYMERES : DIFFÉRENTES APPROCHES MECANQUES, DIFFÉRENTS MODELES RHEOLOGIQUES

Ce thème est illustré par trois articles dans les pages qui suivent. Comme pour l'étude de la compaction de poudres, je ne donne ici qu'un bref résumé de mon activité, réalisée en collaboration avec des collègues « polyméristes » du CEMEF (Jean-François Agassant et Bernard Monasse) ou d'autres institutions (Fabrice Schmidt de l'Ecole des Mines d'Albi). On pourra également consulter l'article de synthèse paru dans les Techniques de l'Ingénieur (Bellet et al., 2002)

Ces activités ont débuté peu après ma thèse, par le stage de Pascal Cosson, au cours duquel le logiciel SUPFORM, issu de mes travaux de thèse sur le formage superplastique et basé sur une hypothèse de type membrane, a été étendu à la simulation des procédés de soufflage de polymères (Bellet et al., 1993).

Au cours de la thèse de Mylène Vantal, le sujet a été approfondi dans le cadre de la simulation du thermoformage, en utilisant une loi de comportement viscoplastique (loi de G'Sell) (Vantal, 1995). Dans ce travail, le formalisme de membrane a été étendu aux feuilles multicouches en considérant les déformations homogènes dans l'épaisseur et en effectuant une moyenne des états de contraintes. D'autre part, le transfert thermique dans l'épaisseur de la feuille a été pris en compte au moyen d'une résolution par éléments finis monodimensionnelle dans chacun des éléments de la triangulation de la surface moyenne (Bellet et al., 1998b). Ces travaux ont donné naissance au logiciel TFORM3[®], successeur du logiciel SUPFORM et commercialisé par la société Transvalor.

La thèse de Fabrice Schmidt nous a permis d'aborder un autre procédé : l'injection-soufflage de bouteilles en PET (poly-éthylène téréphtalate), dont nous avons étudié la phase d'étirage-soufflage, après réchauffage par rayonnement infra-rouge de préformes préalablement injectées (Schmidt, 1995). Nous avons considéré dans ce cas des lois de comportement visco-élastiques, de type différentiel (modèles de Maxwell, Oldroyd-B, Phan-Tien & Tanner). Ces lois ont été implantées dans le logiciel FORGE2[®], pour une modélisation axisymétrique du procédé. Dans ce cas, nous avons donc privilégié une approche volumique complète, par rapport à l'approche simplifiée de type membranaire, essentiellement en raison d'une part des forts gradients de température hérités de la phase de chauffage par infra-rouge, présents dans la préforme au début de la phase d'étirage-soufflage, et d'autre part du contact avec la canne d'étirage (Schmidt et al., 1996, 1998). Par ailleurs, un travail important a été mené pour mettre en évidence des solutions analytiques pour l'étirage-soufflage axisymétrique de tubes (Schmidt et al., 2000). Ces solutions de référence ont été utilisées pour valider les calculs éléments finis, ainsi que pour identifier les conditions justifiant l'utilisation de l'approximation de type membrane, par rapport à la formulation volumique.

Dans la thèse d'Andres Rodriguez-Villa, nous nous sommes intéressés à l'extrusion-soufflage de corps creux minces. Le polymère est alors à l'état fondu et les mêmes lois viscoélastiques de type différentiel ont été revisitées, en insistant sur leur résolution incrémentale dans le contexte membrane, en coordonnées curvilignes, dans le logiciel TFORM3[®] (Rodriguez-Villa, 1997). Dans cette étude, l'accent a également été mis sur le remaillage automatique, absolument nécessaire. Dans cette opération, la finesse du maillage est pilotée principalement par la courbure moyenne de la surface moyenne, de façon à raffiner la discrétisation dans les régions de forte courbure, comme illustré par la partie gauche de la Figure 1 (Bellet et al., 1998a). Enfin, un point important a été le couplage entre l'évolution de la pression de gaz à l'intérieur du corps creux en cours de soufflage et la déformation de ce dernier. Pour cela, nous avons développé un modèle simple de thermodynamique en système ouvert, basé sur l'équation d'état du gaz considéré comme parfait. A chaque incrément de temps, ce modèle a été couplé avec le modèle d'éléments finis (FORGE2[®]) calculant la

déformation du polymère. Ce couplage a permis de rendre compte quantitativement de l'évolution de la pression interne de gaz et de la cinétique de formage (Bellet et al., 1998a).

Enfin, la thèse de Cédric Champin, en cours, porte de nouveau sur la simulation du formage des bouteilles de PET, d'une part en abordant l'aspect chauffage des préformes par lampes à rayonnement infra-rouge (cet aspect est supervisé par Fabrice Schmidt, co-directeur de la thèse, à l'Ecole des Mines d'Albi) et d'autre part en développant une modélisation thermo-mécanique complètement tridimensionnelle de la phase d'étirage-soufflage, comme illustré à la Figure 1 (Champin et al., 2004, 2005). La base de développement est le logiciel tridimensionnel FORGE3[®] développé au laboratoire et à Transvalor. Concernant la modélisation du comportement du polymère, l'implantation de modèles hyper-élastiques (Mooney-Rivlin ou néo-hookéen) s'est avérée un demi-succès. En effet, ces modèles parfaitement élastiques nécessitent des méthodes de continuation pour traiter le passage du maximum de pression appliquée à la préforme. La méthode de longueur d'arc, classique dans ce domaine, a été implantée mais nous avons rencontré ensuite des problèmes d'instabilités. Nous sommes donc revenus à un modèle viscoplastique de G'Sell, censé représenter le comportement viscoélastique du polymère en chargement monotone, ainsi que son durcissement aux grandes déformations. Ce modèle, précédemment caractérisé par Gorlier (2001) au CEMEF, grâce à des essais de traction en grandes déformations, permet actuellement la modélisation de l'ensemble du procédé. Dans l'avenir, il conviendra de revenir sur ces choix de loi de comportement. Là encore, l'utilisation de méthodes inverses par éléments finis permettra sans nul doute de déterminer le meilleur modèle et les paramètres caractéristiques du PET.

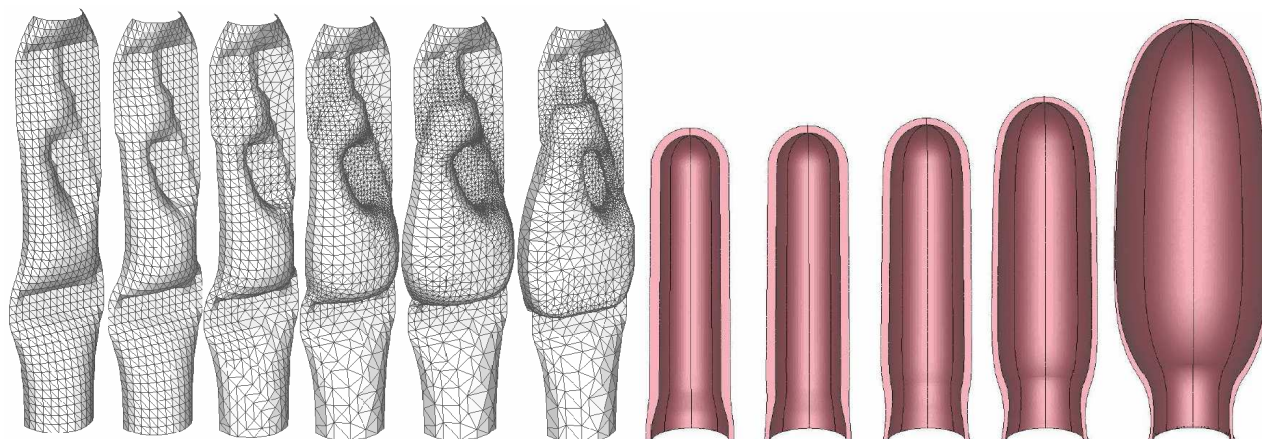


Figure 1. Deux approches différentes pour la modélisation tridimensionnelle par éléments finis des procédés de soufflage de corps creux en polymère. A gauche, approche de type membrane (logiciel TFORM3[®]) utilisée en extrusion-soufflage (Rodriguez-Villa, 1997) ; à droite, approche volumique (logiciel FORGE3[®]), utilisée en injection-soufflage (Champin et al., 2004).

D'autre part, nous avons pour objectif, à travers ces travaux de thèse, d'étudier l'extension des capacités de FORGE3[®] à la modélisation de la déformation de produits minces. Il s'agit en particulier d'optimiser la phase de remaillage automatique dans cette situation, en développant des algorithmes garantissant une discrétisation adaptée dans l'épaisseur du polymère, en contrôlant notamment le degré d'anisotropie des éléments finis utilisés. Ceci peut s'envisager de deux manières différentes. La première méthode, que nous avons développée dans le cadre d'une première application de FORGE3[®] à la modélisation du formage superplastique de tôles minces (Novel, 1998), consiste à utiliser un maillage semi-structuré du corps mince étudié. Ce maillage s'appuie sur un maillage non structuré, en triangles, de sa surface moyenne. Le maillage volumique est obtenu par « extrusion » de couches d'éléments prismatiques à partir de cette surface, chacun des prismes étant divisé en trois tétraèdres. Topologiquement, nous avons démontré qu'un tel maillage était toujours possible. Une phase de remaillage se décompose alors en deux temps (Figure 2) : remaillage de la surface moyenne, en triangles, à l'aide du remaillieur de surface gauche développé dans TFORM3[®], puis extrusion pour reconstruction du nouveau maillage volumique associé. La taille locale des triangles de base, ainsi que le nombre de couches permettent de contrôler l'anisotropie du maillage et la discrétisation spatiale dans l'épaisseur. Cette méthode a été reprise et développée par Robert

Knockaert au cours de ses travaux de thèse sur la modélisation des procédés d'hydroformage de tôles minces (Knockaert, 2001). La seconde méthode consiste à utiliser la capacité du remailleur de FORGE3[®] à considérer une métrique non euclidienne. Il est alors possible de contrôler le degré d'anisotropie du maillage en définissant une métrique locale appropriée. Vraisemblablement, la comparaison de ces deux méthodes de discrétisation spatiale ne pourra pas être approfondie dans le cadre des travaux de thèse de Cédric Champin. Elle devra donc s'inscrire comme un prolongement de ces derniers.

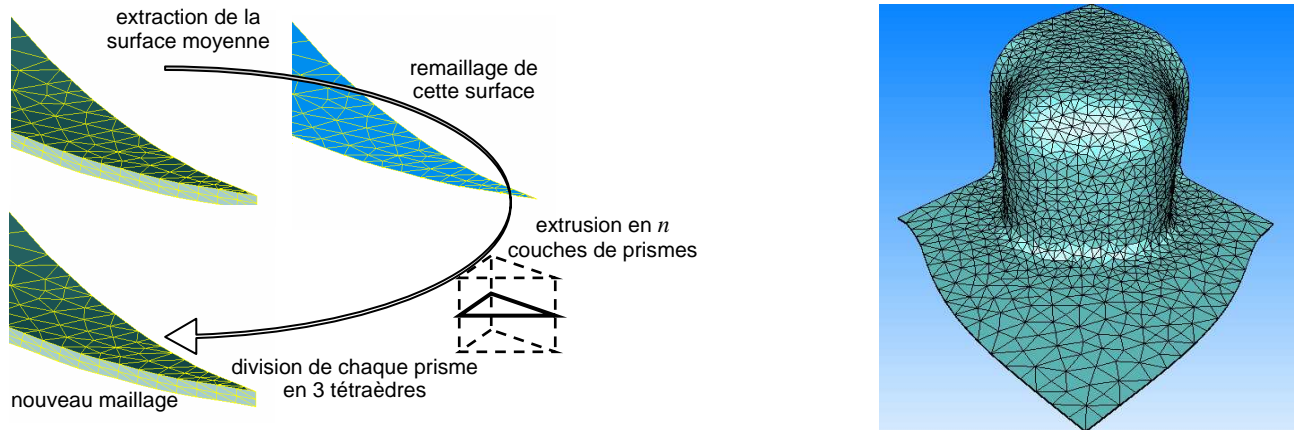


Figure 2. Méthode de remaillage automatique semi-structuré pour la discrétisation spatiale volumique des produits minces. A droite, on montre une exploitation de la méthode en simulation d'emboutissage de tôles minces (Knockaert, 2001).

La simulation des procédés de soufflage de polymères
Différentes approches mécaniques, différents modèles rhéologiques

Pour illustrer la thématique « polymères », j'ai choisi trois articles couvrant les différents procédés étudiés (injection-soufflage, thermoformage, extrusion-soufflage), ainsi que les aspects éléments finis, thermo-mécanique des procédés, couplage thermodynamique. J'ai conservé l'article des Techniques de l'Ingénieur dans cette sélection car il représente une bonne synthèse de ma contribution au domaine.

Viscoelastic Simulation of P.E.T Stretch/Blow Molding Process

Fabrice SCHMIDT, Jean-François AGASSANT,
Michel BELLET, Luc DESOUTTER

Int. J. Non Newtonian Fluid Mech. 64 (1996) 19-42

Thermal Effects in the Numerical Simulation of the Thermoforming
of Multilayered Polymer Sheets

Michel BELLET, Marie-Hélène VANTAL, Bernard MONASSE

Int. Polymer Processing 13 (1998) 299-308

Simulation numérique des procédés de soufflage de polymères

Michel BELLET, Bernard MONASSE, Jean-François AGASSANT

Techniques de l'Ingénieur, vol. AM, article AM3705 (2002) 1-23

3 APPROCHE DES PHENOMENES THERMOMECHANIQUES EN SOLIDIFICATION DES ALLIAGES METALLIQUES

Au début des années 90, la simulation des procédés de solidification est abordée essentiellement d'un point de vue thermique. Parallèlement le calcul de structure est en plein essor, bien que les moyens numériques restent limités et brident son exploitation industrielle. Se pose alors le problème de calculer les distorsions et les contraintes résiduelles des pièces coulées. A l'époque – et encore souvent dans la littérature actuelle ! – ceci est effectué de manière « acrobatique » : on jongle avec les maillages pour n'effectuer les calculs de mécanique que dans les régions déjà solidifiées, ou bien on utilise abusivement des « extrapolations » des lois de comportement élasto-plastiques de façon à assurer la continuité des calculs dans les régions liquides (aux dépens de la prise en compte correcte du retrait volumique à la solidification), enfin le couplage thermomécanique entre pièce et moule n'est pas simulé sur des bases physiques raisonnablement saines, voire pas simulé du tout. Ce sont ces lacunes qui ont motivé le développement d'une activité « thermomécanique des procédés de solidification » au sein du CEMEF.

Au cours des thèses de Jean-Jacques Brioist et Mamar Ménai (Brioist, 1995 ; Ménai, 1995), nous avons mis en place une approche éléments finis 3D thermomécanique multidomaine. Pièces et éléments de moules sont discrétisés de manière indépendante, sans contrainte de coïncidence de maillage. L'échange thermique peut dépendre localement des pressions de contact ou des lames d'air générées toutes deux par le retrait à la solidification et les dilatations thermiques. Ce nouveau logiciel, dérivé du logiciel FORGE3®, également développé au CEMEF, est dénommé THERCAST® (Bellet et al., 1996).

Dans les sections suivantes, nous détaillons les principales caractéristiques des solveurs mécaniques et thermiques de THERCAST® et de son équivalent en version bidimensionnelle, R2SOL. Nous consacrerons ensuite une partie spéciale à la méthode ALE avant de montrer des exemples d'application en section 5.

3.1 SOLVEUR MECANIQUE

3.1.1 Equations constitutives pour alliages métalliques en condition de solidification

Ce point sera abordé en détail dans la section 6 de ce mémoire, où sont discutées les approches monophasiques et biphasiques de la zone pâteuse. Pour l'instant, nous nous plaçons dans le cas de figure où l'alliage est considéré comme un milieu continu équivalent monophasé obéissant à une loi de comportement standard.

L'alliage à l'état liquide ou pâteux est modélisé par une loi de comportement de type viscoplastique thermo-dépendante, sans contribution de l'élasticité. En fonction de la température (ou de la fraction de solide), la loi de comportement est soit purement newtonienne (état complètement liquide), soit viscoplastique non linéaire (état pâteux). En dessous d'une température critique T_C (par exemple la température « de cohérence » ou la température de solidus), le comportement de l'alliage est modélisé par une loi thermo-élasto-viscoplastique, plus représentative d'un comportement de type solide. Les deux cas de figure sont explicités ci-dessous.

Loi de comportement de type liquide : thermo-viscoplasticité

Dans ce cas, le tenseur des taux de déformation est décomposé additivement en une partie viscoplastique et une partie thermique : la compressibilité provient uniquement des phénomènes de dilatation thermique et de retrait à la solidification (absence de déformation élastique). Les équations du comportement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{2K} \left(\sqrt{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq} \right)^{1-m} \mathbf{s} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{I} \end{cases} \quad (1)$$

Cette décomposition additive est légitime, les vitesses de déformation d'origine thermique étant faibles. L'équation (1b) est la loi de comportement classique d'un fluide non newtonien généralisé. Elle relie le tenseur des taux de déformation viscoplastique au tenseur déviateur des contraintes. Le cas limite est le comportement newtonien, que l'on rencontre à l'état liquide, et pour lequel on a $m = 1$. Dans ce cas, K est simplement la viscosité dynamique du liquide.

On remarque l'incompressibilité de la partie viscoplastique de la transformation, \mathbf{s} étant de trace nulle, par définition. En l'absence d'élasticité, la variation de volume provient donc uniquement des phénomènes thermiques. En effet, en prenant la trace de (1a), on a :

$$\text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2)$$

qui n'est autre que l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

Nous supposons qu'à l'état liquide la masse volumique ρ ne dépend que de la température. Dans ce cas, en définissant le coefficient de dilatation thermique linéique α par :

$$\alpha = -\frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (4)$$

nous avons :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha \dot{T} \mathbf{I} = \alpha \frac{dT}{dt} \mathbf{I} \quad (5)$$

A l'état pâteux et dans le cadre d'une approche de type milieu continu équivalent monophasé, nous supposons que la masse volumique évolue linéairement avec la fraction volumique de solide, conformément à une loi de mélange. En désignant par ρ_L et ρ_S les masses volumiques de début et de fin de solidification respectivement, nous avons :

$$\rho = g_s \rho_S + g_l \rho_L \quad (6)$$

Le taux d'expansion volumique lors du changement de phase liquide \rightarrow solide, en général négatif (« retrait » des alliages lors de la solidification) est alors :

$$\Delta \varepsilon^{tr} = \int \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}) dt = \int -\frac{d\rho}{\rho} = -\ln \frac{\rho_S}{\rho_L} \approx \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_L} \quad (7)$$

On peut donc également écrire, dans l'intervalle de solidification :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{I} = -\frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial g_s} \dot{g}_s \mathbf{I} = -\frac{1}{3\rho} (\rho_S - \rho_L) \dot{g}_s \mathbf{I} \approx \frac{1}{3} \Delta \varepsilon^{tr} \dot{g}_s \mathbf{I} \quad (8)$$

Loi de comportement de type solide : thermo-élasto-viscoplasticité

Ce modèle est utilisé pour représenter le comportement du matériau en dessous de la température critique T_C . Il est décrit par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{I} + \dot{T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \boldsymbol{\sigma} - \dot{T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\nu}{E} \right) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{eq}} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{00} - H\varepsilon_{eq}^n}{K\sqrt{3}} \right\rangle^{1/m} \mathbf{s} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (9)$$

L'élasticité, régie par la loi de Hooke, est cette fois prise en compte. Le tenseur des taux de déformation est donc divisé en parties élastique, viscoplastique et thermique (9a). Dans la loi de Hooke (9b), on tient compte de la variation des coefficients d'élasticité avec la température. La loi d'écoulement viscoplastique (9c) est une loi à seuil, l'expression entre crochets étant prise nulle si négative, c'est-à-dire si la contrainte équivalente de von Mises reste inférieure à un seuil dont la valeur varie avec l'écrouissage ($\sigma_{00} + H\varepsilon_{eq}^n$).

Il est à noter que l'expression (9d) est dans ce cas légèrement différente de l'équation de conservation de la masse, puisqu'on a $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$. En effet, la variable ρ , qui figure dans cette relation, désigne en effet la masse volumique associée à la configuration relâchée élastiquement (Mandel, 1971). Cette masse volumique ne dépend que de la température et est différente de celle utilisée dans l'équation de conservation de la masse, dont la variation résulte des effets thermiques et élastiques. Dans la suite, étant données les faibles déformations élastiques, nous négligerons cette différence.

Commentaires sur le choix de la température critique T_C

Le choix de la température critique séparant les deux modèles est arbitraire. Si nous nous référons à certains travaux de caractérisation rhéologique des gélées semi-solides, tels ceux de Vicente-Hernandez (1994), il semble que cette température limite puisse être choisie égale à la température dite « de cohérence », qui peut se définir comme étant la température en dessous de la quelle le milieu semi-solide peut transmettre des contraintes, de par l'apparition d'une continuité du squelette solide. Dans ce cas, la température de transition entre les deux types de modèles constitutifs est située dans l'intervalle de solidification. En particulier, cela signifie que les effets élastiques se manifestent à l'état pâteux, à haute fraction solide.

Une alternative consiste à prendre une température T_C inférieure, éventuellement plus basse que la température de solidus de l'alliage. Dans ce dernier cas, cela signifie que les effets élastiques sont supposés négligeables à haute température à l'état solide. Ceci constitue une approximation très fréquente en simulation des procédés de mise en forme à chaud des alliages métalliques (Wagoner & Chenot, 2001).

Dans la plupart des simulations effectuées avec cette approche simple de type milieu continu équivalent monophasé, nous avons pris la température T_C égale à la température de solidus.

3.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation locale de conservation de la quantité de mouvement, ou d'équilibre dynamique est :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\gamma} = \nabla \cdot \mathbf{s} - \nabla p + \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (10)$$

Dans ce document, les différents types de conditions aux limites ne sont pas présentés, voir (Jaouen, 1998 ; Bellet et al., 2005). Elles englobent le contact avec frottement à l'interface pièce-moule, ainsi qu'entre les composants de moule eux-mêmes. De même, on trouvera dans ces mêmes références la description de la résolution multidomaine.

3.1.3 Forme intégrale des équations du problème mécanique

Les variables primitives sont la vitesse et la pression. Le problème à résoudre est alors constitué de deux équations. La première est la forme faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, donnée par le principe des puissances virtuelles. La pression p étant une variable primitive, seule la partie déviatoire des équations constitutives apparaît et nécessite une résolution locale pour déterminer le tenseur déviatoire des contraintes s . Par conséquent, la seconde équation correspond à la forme faible de la partie sphérique des équations de comportement. Elle exprime l'incompressibilité de la partie plastique de la déformation. On a donc :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}^* \int_{\Omega} s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}^* dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* dS - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot \mathbf{v}^* dV = 0 \\ \forall p^* \int_{\Omega} p^* \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} dV = 0 \end{cases} \quad (11)$$

La variable pression apparaît comme un multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'incompressibilité. La forme du terme intégré dans la seconde équation varie en fonction de l'état de l'alliage métallique, c'est-à-dire en fonction de la température. Dans le cas d'une équation de comportement de type solide, on a :

$$\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} - \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{3(1-2\nu)}{E} \dot{p} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (12)$$

tandis que dans le cas d'un comportement de type liquide, purement viscoplastique, la contribution élastique disparaît, ce qui conduit à :

$$\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (13)$$

De la même manière, l'expression du déviatoire des contraintes s dans (11a) provient soit d'une loi thermo-élasto-viscoplastique, soit d'une loi thermo-viscoplastique.

3.1.4 Discrétisation temporelle

Etant donnée la configuration occupée par le matériau à l'instant t , les équations à résoudre en $(\mathbf{v}, p)^t$, champs de vitesse et pression à l'instant t , peuvent s'exprimer de la façon suivante (par souci de clarté, nous considérons ici le seul cas de figure thermo-élasto-viscoplastique dans la seconde équation).

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}^* \int_{\Omega'} s(\mathbf{v}^t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV - \int_{\Omega'} p^t \nabla \cdot \mathbf{v}^* dV - \int_{\partial\Omega'} \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{v}^* dS - \int_{\Omega'} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\Omega'} \rho \frac{\mathbf{v}^t - \mathbf{v}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}^* dV = 0 \\ \forall p^* \int_{\Omega'} p^* \left(-\nabla \cdot \mathbf{v}^t - \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{p^t - p^{t-\Delta t}}{\Delta t} - \frac{1}{\rho(T^t)} \frac{\rho(T^t) - \rho(T^{t-\Delta t})}{\Delta t} \right) dV = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Dans cette équation, T^t est fourni par la résolution thermique. Les dérivées temporelles de la pression, de la vitesse et de la masse volumique sont approchées par un schéma de type différences finies d'Euler implicite :

$$\dot{p}^t = \frac{1}{\Delta t} (p^t - p^{t-\Delta t}) \quad \gamma^t = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}^t - \mathbf{v}^{t-\Delta t}) \quad (15)$$

Après résolution, l'actualisation de la configuration est effectuée selon le schéma :

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \Delta t \mathbf{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \gamma^t = \mathbf{x}^t + \Delta t \mathbf{v}_{mat} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}_{mat} = \frac{3}{2} \mathbf{v}^t - \frac{1}{2} \mathbf{v}^{t-\Delta t} \quad (16)$$

En dehors de l'application au remplissage de moules, les vitesses matérielles et leurs dérivées temporelles restent assez faibles, ce qui permet de négliger le terme de second ordre dans (16). Dans ce cas, $\mathbf{v}_{mat} = \mathbf{v}^t$. En ce qui concerne les dérivées particulières que l'on voit apparaître dans les équations

précédentes, elles ne posent évidemment aucun problème tant que la formulation est de type lagrangienne actualisée, c'est-à-dire tant que le maillage est convecté avec la matière. Dans le cas inverse, des méthodes spécifiques doivent être envisagées : elles seront présentées à la section 4.

3.1.5 Discrétisation spatiale par éléments finis et résolution

Dans les logiciels THERCAST® et R2SOL, le maillage d'éléments finis est composé d'éléments linéaires tétraèdres et triangulaires, respectivement. Le « mini-élément » P1+/P1, développé dans les années 80 (Arnold et al., 1984; Fortin & Fortin, 1985) est utilisé. Dans cet élément, le champ de vitesse est essentiellement linéaire et sa continuité avec les éléments voisins est assurée, mais il inclut une composante centrale de type « bulle » de façon à satisfaire la condition de Brezzi-Babuska. Dans la version développée au CEMEF par Thierry Coupez (Coupez, 2003), cette correction centrale de vitesse varie linéairement sur chacun des sous-tétraèdres en 3D (respectivement sur chacun des sous-triangles en 2D), entre sa valeur au centre de l'élément et zéro sur chacune des faces (respectivement, des côtés) de l'élément (Bellet et al., 2005) (Figure 3)

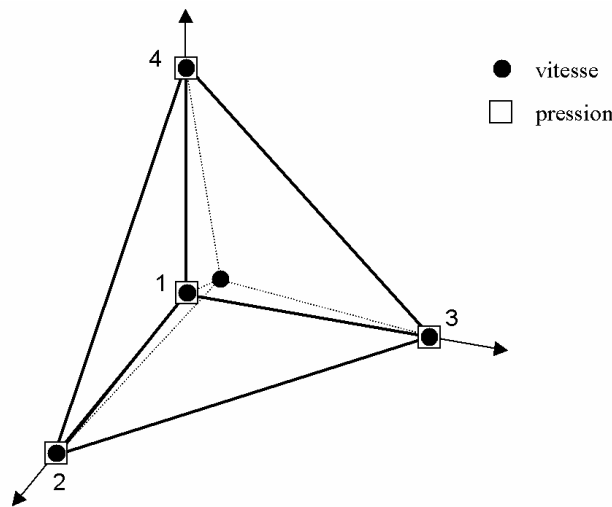


Figure 3. Élément fini tétraèdre P1+/P1.

L'équation des puissances virtuelles est donc projetée sur l'espace P1 et sur l'espace P1+ des champs de type bulle (Jaouen, 1998; Bellet & Jaouen, 1999; Bellet et al., 2005). En condensant les degrés de liberté bulle (internes à l'élément) au cours du processus d'assemblage, ceci conduit à la résolution d'un système d'équations non linéaires dont les inconnues sont le vecteur \mathbf{V} des vitesses nodales et le vecteur \mathbf{P} des pressions nodales :

$$\mathbf{R}_{mech}(\mathbf{V}, \mathbf{P}) = 0 \quad (17)$$

Ce système d'équations est résolu par une méthode itérative de Newton-Raphson. A chaque itération, la résolution du système linéarisé est effectuée par un solveur itératif avec préconditionnement.

3.1.6 Présence simultanée de régions de type liquide et de type solide

La formulation élément fini présentée est compatible, on l'a vu, avec un comportement de type solide ou liquide, c'est-à-dire avec ou sans élasticité. Par conséquent, elle permet de traiter simultanément les régions solidifiées et les régions liquides ou pâteuses d'une même pièce de fonderie en cours de solidification. Un tel problème global s'exprime de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}^* \quad \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}^{vp} \\ \mathbf{s}^{evp} \end{array} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}^* dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* dS - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot \mathbf{v}^* dV = 0 \\ \forall p^* \quad \int_{\Omega} p^* \left(-\nabla \cdot \mathbf{v} - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 3\dot{p}(1-2\nu)/E \end{array} \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) dV = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

Les accolades dans les deux équations permettent la distinction entre les deux lois de comportement. Le choix est alors effectué au moment du traitement et de l'assemblage de chaque élément fini, en fonction de la température en son centre. Si cette température est plus élevée que la température critique T_C , l'élément est considéré viscoplastique (ligne supérieure dans les accolades). A l'inverse, si cette température est inférieure à T_C , l'élément est considéré élasto-viscoplastique (ligne inférieure dans les accolades). A ce niveau, il est important de noter que la distinction est faite élément par élément (et non nœud par nœud) et qu'un élément dans son ensemble est traité avec l'un ou l'autre des modèles de comportement.

3.2 SOLVEUR THERMIQUE

Dans les logiciels THERCAST® et R2SOL, le transfert de chaleur est résolu sur les différents domaines Ω_i impliqués dans le problème de solidification, c'est-à-dire la pièce en cours de solidification et les différents éléments constitutifs du moule. On ne décrit pas ici la résolution multidomaine, voir par exemple la thèse d'Olivier Jaouen (Jaouen, 1998). L'équation du transfert thermique à résoudre sur ces différents domaines Ω_i inclut éventuellement un changement de phase (en particulier dans la pièce), mais pas de terme de source, et peut donc s'écrire :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (19)$$

L'enthalpie massique h est définie par :

$$h = \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + f_l L \quad (20)$$

avec T_0 une température de référence, c_p la chaleur massique, f_l la fraction massique de liquide et L la chaleur latente massique de fusion. En dehors des études sur la modélisation de la macroségrégation, pour lesquelles on couple thermique et transport de solutés, on considère que le chemin de solidification $f_l(T)$ est donné, ce qui fournit une relation directe entre enthalpie et température.

Les conditions thermiques des problèmes modélisés sont très classiques (température imposée, flux de chaleur imposé, condition de convection avec coefficient de transfert thermique, rayonnement de type corps gris) et ne sont pas exposées ici.

La discrétisation spatiale de type Galerkin conduit au système classique d'équations non linéaires :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (21)$$

Avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{K} la matrice de conductivité, \mathbf{Q} le vecteur de chargement thermique, $\dot{\mathbf{H}}$ le vecteur des dérivées temporelles de h aux nœuds, et \mathbf{T} le vecteur des températures nodales.

Le changement de phase liquide/solide est traité par une technique proposée par Lemmon (1981). Son application aux éléments linéaires tétraèdres ou triangles consiste à définir une chaleur massique effective constante par élément, obtenue par la formule suivante :

$$c_{eff} = \frac{\partial h}{\partial T} \approx \frac{\|\nabla h(T)\|}{\|\nabla T\|} \quad (22)$$

Le système d'équations (21) devient alors :

$$C\dot{T} + KT = Q \quad (23)$$

avec \dot{T} le vecteur des dérivées temporelles de la température aux nœuds, C la matrice de capacité thermique. Cette dernière matrice est donc dépendante de la température dans l'intervalle de solidification (également en dehors, du fait de variations de c_p). De plus, la matrice K et le vecteur Q peuvent également dépendre de T .

En ce qui concerne les dérivées particulières de la température, la même remarque qu'à la section 3.1.4 peut être faite : lorsque le maillage n'est pas convecté avec la matière, le traitement des termes d'advection est nécessaire et sera détaillé en section 4.

Un schéma d'Euler implicite à un pas est utilisé pour la discrétisation temporelle de ces équations, ce qui conduit à un système d'équations non linéaires dont les inconnues sont les températures nodales en fin d'incrément, et qui est résolu par une méthode itérative de Newton-Raphson.

$$R_{therm}(T^{t+\Delta t}) = 0 \quad (24)$$

3.2.1 Traitement des chocs thermiques

Une des principales difficultés de la résolution thermique, outre le changement de phase, réside dans le traitement des chocs thermiques. En effet, il est bien connu que la résolution des problèmes de conduction thermique par la méthode de Galerkin standard donne lieu à des oscillations à la fois temporelles et spatiales. Nous parlons ici dans un premier temps de problèmes de type diffusion pure, en mettant à part les problèmes associés aux termes d'advection. Ces oscillations se produisent au voisinage des frontières en cas d'imposition d'un fort changement de température (condition de Dirichlet) ou d'un flux thermique élevé (condition de Neumann ou mixte). Il est maintenant établi (Putti & Cordes, 1998) qu'une condition suffisante pour éviter de telles oscillations est que la matrice du système à résoudre (23), $(1/\Delta t)C + K$, soit une M-matrice, c'est-à-dire une matrice telle que ses composantes extra-diagonales soient négatives ou nulles et que toutes les composantes de son inverse soient positives ou nulles. En effet, cette condition garantit le respect du principe du maximum (Protter & Weinberger, 1984 ; Kosik et al., 2000) d'après lequel la solution d'une équation parabolique atteint son maximum soit à l'instant initial, soit à la frontière du domaine étudié. Comme l'expliquent Kosik et al., en dimension 2 et si le maillage est de Delaunay, la matrice de conductivité K est une M-matrice. Dès lors, la condensation de la matrice de capacité C assure que C est une M-matrice et donc également la matrice du système, la somme de deux M-matrices étant une M-matrice. En dimension 3, le caractère Delaunay du maillage ne suffit plus : la matrice de conductivité n'est en général pas une M-matrice et ceci ne peut être compensé par la condensation de la matrice de capacité. Remarquons par ailleurs que dans le cas où un opérateur d'advection intervient dans le système différentiel, la propriété M-matrice ne peut être assurée, même en dimension 2. Il convient donc d'examiner d'autres méthodes. Au CEMEF, plusieurs voies ont été investiguées :

- **La thermique dite « asynchrone »** (Jaouen 1998 ; Aliaga, 2000). Cette méthode repose sur le constat que la solution est exempte d'oscillations si la « profondeur de pénétration » du choc thermique au cours d'un incrément de temps est plus grande que la taille de la discrétisation dans les régions soumises au choc thermique, en d'autres termes si :

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p}} \Delta t > h \quad (25)$$

où h désigne la taille de la discrétisation. La mise en œuvre de cette méthode consiste à déterminer un pas de temps Δt_s vérifiant cette relation (plus grand que le pas de temps nominal Δt), à résoudre l'équation de la thermique avec Δt_s et à interpoler linéairement la solution selon Δt . Cette méthode est imprécise sur les tout premiers instants du choc thermique. Elle donne cependant des résultats acceptables lorsque le problème est faiblement non linéaire. En revanche, elle présente en pratique des inconvénients rédhibitoires lorsque les rapports $\Delta t_s / \Delta t$ sont élevés

et que le problème est fortement non linéaire, comme justement en solidification à cause du changement de phase.

- **La méthode de Taylor-Galerkin discontinu** (TGD) (Pichelin, 1998). Cette méthode utilise une discrétisation constante par élément (P0) du champ de température et du vecteur flux de chaleur. Son caractère explicite dans le temps peut limiter considérablement le pas de temps utilisé dans l'intégration et donc engendrer des temps de calcul élevés.
- **La méthode de Galerkin discontinu implicite** (GDimp) (Batkam, 2002). Utilisant un schéma implicite et une discrétisation P0/P0+ (le vecteur flux de chaleur étant constant par sous-tétraèdre, d'où le P0+), cette méthode est plus efficace que la précédente, mais présente tout de même des inconvénients : grande sensibilité au maillage, notamment anisotrope ; résolution utilisant 1 degré de liberté par élément, soit cinq fois plus de degrés de liberté qu'une résolution nodale P1 (un maillage 3D contenant environ cinq fois plus d'éléments que de nœuds).
- **La méthode mixte température-flux** (Pélissou & Massoni, 2004) dans laquelle température et vecteur flux de chaleur sont discrétisés en P1. Cette méthode s'avère robuste mais génère un temps de calcul important (4 inconnues par nœud en dimension 3).

Au cours de nos travaux et en collaboration avec Victor Fachinotti, nous avons proposé une nouvelle méthode qui repose sur une méthode de « splitting » (éclatement) sur l'opérateur de diffusion. On trouvera sa description complète dans (Fachinotti & Bellet, 2004 et Fachinotti & Bellet, 2005). Précisons ici brièvement que cette méthode utilise une discrétisation de type Galerkin P1 et consiste à déterminer une conductivité augmentée λ^* de façon à respecter la relation (25). En association avec une discrétisation temporelle de type Euler implicite, on résout le système suivant :

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}^{t+\Delta t} (\mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{T}^t) + \mathbf{K}^{*t+\Delta t} \mathbf{T}^{t+\Delta t} = \mathbf{Q}^{t+\Delta t} + (\mathbf{K}^{*t+\Delta t} - \mathbf{K}^{t+\Delta t}) \mathbf{T}^t \quad (26)$$

La matrice de conduction est donc modifiée du fait du changement de la conductivité et ceci est compensé par un terme de second membre faisant intervenir une approximation explicite de la température, en l'occurrence la température de début d'incrément. Dans un calcul multidomaine de solidification, la détermination de la valeur optimum λ^* , déterminée sur chaque sous-domaine, fait l'objet d'un calcul préliminaire (effectué après chaque remaillage éventuel) dans lequel on détermine de manière heuristique un pas de temps optimal Δt^* qui est le pas de temps minimum pour lequel la solution du problème standard initial ne présente pas d'oscillation sur l'ensemble du domaine étudié. Au total, cette méthode s'avère performante et économique en temps de calcul, puisque basée sur la seule discrétisation P1 du champ de température (ou d'enthalpie). Nous renvoyons le lecteur aux deux articles précédemment cités pour un examen des résultats.

Pour conclure sur cette présentation rapide des solveurs thermomécaniques utilisés dans les logiciels THERCAST® et R2SOL, nous invitons le lecteur à consulter l'article (Kron et al., 2004) qui figure à la fin du présent document (section 11). A l'occasion d'un benchmark réalisé dans le cadre du réseau thématique européen MEBSP (Microstructure Engineering By Solidification Processing), les performances de ces logiciels ont en effet été comparées avec celles de quelques codes commerciaux et académiques, tels que CASTS, MAGMASOFT et PROCAST.

4 FORMULATION ALE POUR LA SOLIDIFICATION

Cette partie est extraite d'un article récemment paru dans la revue *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* et qu'on trouvera à la section 11 : M. Bellet, V.D. Fachinotti, ALE method for solidification modelling (Bellet & Fachinotti, 2004).

4.1 ALE ET SOLIDIFICATION : UNE BREVE REVUE DE LA LITTÉRATURE

Rappelons tout d'abord que la formulation ALE (arbitrairement lagrangienne eulérienne) consiste à distinguer, lors de la résolution d'un problème discrétisé numériquement, le champ de vitesse des points de la discrétisation (les nœuds en éléments finis) du champ de vitesse matérielle (le champ de vitesse des particules matérielles dont la position coïncide avec celle des nœuds à un instant donné. La formulation ALE est donc intermédiaire entre la formulation eulérienne (discrétisation fixe dans l'espace) et la formulation lagrangienne (discrétisation évoluant à la même vitesse que les particules matérielles). Nous allons voir ci-dessous que l'ALE peut s'avérer extrêmement utile dans deux étapes essentielles de la simulation des procédés de solidification que sont le remplissage du moule et le refroidissement de l'alliage.

Commençons donc par la simulation du remplissage, dont le but est double. D'une part elle doit fournir des conditions pertinentes en termes de champ de température et de champ de vitesse aux simulations en aval (phase de refroidissement). D'autre part, elle doit permettre de comprendre et de maîtriser l'apparition de défauts tels que des solidifications précoces pendant la phase de remplissage, l'entraînement d'inclusions ou de peaux d'oxydes par une turbulence trop marquée de l'écoulement notamment au voisinage de la surface libre, l'usure des moules, etc. La plupart des modèles de remplissage sont de type eulérien (maillage fixe). Ceci est bien sûr la manière la plus facile d'aborder le problème, la grille de calcul restant identique d'un bout à l'autre de la simulation. Par conséquent, un des problèmes principaux associés à ce type de formulation est le suivi de la surface (en général libre) constituant le front de matière. La plupart des codes utilisent la méthode VOF (volume of fluid) ou l'une de ses variantes (Bourg et al., 1992 ; Barkhudarov et al., 1993 ; Waite & Samonds, 1993 ; Codina et al., 1994 ; Lewis et al., 1995 ; Mampey & Xu, 1995 ; Zhu & Ohnaka, 1995 ; Médale & Jaeger, 1997 ; Magmasoft, 2003 ; Procast, 2003). La méthode VOF (Hirt & Nichols, 1981) consiste à résoudre l'équation de conservation $d\chi/dt = 0$ de la variable χ – la fonction de présence du métal liquide – valant 1 en présence de métal et 0 sinon. Deux fluides sont en général pris en compte : l'alliage fondu et le gaz présent dans les régions non remplies. Cette méthode souffre de manière inhérente de la diffusion numérique provenant de la résolution de l'équation de suivi de la surface libre, qui est de nature purement advective. La précision du calcul est alors très fortement dépendante de la taille de maille au voisinage du front. Ceci implique qu'en cas d'écoulement complexe, l'utilisateur doive avoir *a priori* une très bonne idée de l'allure de l'écoulement, de manière à concevoir un maillage apte à en saisir toute la complexité. Cela est évidemment très difficile, voire irréaliste. Par ailleurs, la méthode supporte difficilement la discontinuité de viscosité et de masse volumique entre alliage et gaz au voisinage du front. Ces valeurs sont nécessairement lissées au front, ce qui réduit encore la précision. Au total, la surface $\chi = 1/2$, censée représenter la surface libre du métal, n'est le plus souvent qu'une représentation très approximative de cette dernière, l'étendue des diffusions numériques entre les valeurs 0 et 1 pouvant être de taille significative par rapport aux dimensions caractéristiques du problème. Une alternative à ces méthodes eulériennes est fournie par des méthodes dans lesquelles le maillage couvre seulement le domaine occupé par l'alliage. Initialement, la formulation lagrangienne actualisée, dans laquelle le maillage est convecté avec la matière, a été utilisée en combinaison avec la technique de remaillage statique, de manière à régénérer périodiquement le maillage, affecté par les très grandes déformations (Muttin et al., 1993). Cette méthode dérivait donc directement de celles utilisées en simulation des grandes déformations de milieux solides. Puis, pour éviter les multiples remaillages complets, elle a été

associée avec la formulation ALE (Navti et al., 1997 ; Lewis et al., 1997 ; Gaston et al., 2000). Dans la suite, nous donnerons un exemple d'application d'une telle méthode ALE que nous avons développée pour la simulation bidimensionnelle du remplissage des moules de fonderie.

Venons en maintenant à la seconde étape des simulations de procédés de coulée, la solidification et le refroidissement, dans laquelle l'ALE est également très utile. Après le remplissage et pendant la phase de refroidissement et de solidification progressive de l'alliage, les régions encore liquides peuvent être affectées de mouvements de convection causés par les gradients de masse volumique. La convection thermique s'amorce pour des nombres de Rayleigh élevés (typiquement quelques milliers), ce qui est le cas en général pour les grosses pièces. Les gradients de masse volumique peuvent également être dus aux gradients de concentration en éléments d'alliage. Lorsqu'on considère une masse volumique constante dans le terme de source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ces phénomènes de convection thermique et solutale sont négligés et les régions liquides sont alors quasi statiques au long du refroidissement : l'écoulement dans les régions liquides est alors seulement induit par la contraction volumique au changement de phase et pendant le refroidissement. A l'inverse, lorsqu'on prend en compte la dépendance de la masse volumique en fonction de la température et des concentrations, les écoulements de convection sont modélisés. Dans ce cas, les vitesses dans les régions liquides sont significativement plus élevées que dans les régions solides. Dans les deux cas, et plus particulièrement dans le second, l'écoulement du liquide ne peut plus être envisagé en formulation lagrangienne, ce qui conduirait à des dégénérescences du maillage ou à des remaillages trop fréquents. Dans le même temps, une formulation purement eulérienne n'est pas satisfaisante pour représenter l'évolution des surfaces libres dans les régions solidifiées de la pièce : modéliser la formation d'une très fine lame d'air à l'aide d'un algorithme de suivi de front ne permettrait en aucun cas d'assurer la précision suffisante (tout au moins dans des conditions réalistes de raffinement de maillage, même anisotrope). Par conséquent, la formulation ALE apparaît très attractive pour la résolution de tels problèmes faisant intervenir simultanément mécanique des solides et des fluides.

4.2 FORMULATION ALE DANS R2SOL ET THERCAST[®]

Au cours des travaux de thèse d'Olivier Jaouen, nous avons implanté la méthode ALE dans le code THERCAST[®] (Jaouen, 1998 ; Bellet & Jaouen, 1999 ; Bellet et al., 2005).

L'ALE a été implantée suivant la stratégie la plus fréquemment rencontrée dans la littérature, à savoir le découplage entre calcul du champ de vitesse matérielle et calcul du champ de vitesse du maillage à chaque incrément de temps. Dans un premier temps, les vitesses matérielles sont calculées en résolvant (17). Dans un second temps, les vitesses de maillage, notées \mathbf{v}_{msh} , sont calculées, ce qui permet d'actualiser la configuration occupée par le matériau. Dans le contexte de la modélisation des procédés de solidification, trois problèmes essentiels doivent donc être résolus :

- le calcul du champ de vitesse de maillage ;
- la prise en compte de la différence de vitesse $\mathbf{v}_{mat} - \mathbf{v}_{msh}$ dans les différentes équations de conservation, \mathbf{v}_{mat} désignant la vitesse d'actualisation incrémentale telle que définie par la relation (16) ;
- la détermination des zones du domaine de calcul qui doivent être traitées en formulation lagrangienne et eulérienne-lagrangienne.

Ces trois questions font l'objet des trois paragraphes suivants.

4.2.1 L'actualisation du maillage

L'actualisation lagrangienne de la configuration est définie par (16), soit globalement :

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{X}^t + \Delta t \mathbf{V}_{mat}^t \quad (27)$$

où \mathbf{X} et \mathbf{V}_{mat} désignent les vecteurs globaux des coordonnées nodales et des vitesses d'actualisation incrémentales, respectivement.

En formulation ALE, le déplacement des nœuds diffère en général du déplacement des particules matérielles. Sur un incrément de temps, on peut écrire la relation suivante entre les coordonnées nodales actualisées et les vitesses de maillage aux nœuds.

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{X}^t + \Delta t \mathbf{V}_{msh} \quad (28)$$

où \mathbf{V}_{msh} désigne le vecteur global des vitesses de maillage aux nœuds.

Par conséquent, et d'un point de vue général, la détermination de \mathbf{V}_{msh} peut être guidée par diverses considérations : une régularisation géométrique du maillage dans l'objectif de contrôler les facteurs de forme des éléments, un changement de la densité de maillage dans certaines régions dans l'objectif d'approcher une taille de maille visée déterminée par d'autres critères, tels que des critères d'estimation d'erreur. Dans ce dernier cas, le mouvement du maillage résulte d'une combinaison entre régularisation et adaptativité. Dans la suite, nous restreignons notre présentation à une régularisation géométrique. Nous distinguons alors le traitement des nœuds internes et des nœuds frontière, pour lesquels des contraintes additionnelles de conservation de volume doivent être satisfaites.

Régularisation des nœuds internes

Les vitesses nodales sont calculées de façon à minimiser la distorsion du maillage actualisé. Ceci est réalisé en écrivant qu'après actualisation chaque nœud n doit être le plus proche possible du barycentre de l'ensemble des nœuds voisins de n . En notant $\tau_{nb}(n)$ cet ensemble et $nb(n)$ son cardinal, le problème à résoudre est le suivant :

Trouver le vecteur \mathbf{V}_{msh} des vitesses de maillage nodales, tel que :

$$\text{Min}_{\mathbf{V}_{msh}} \sum_n \left\| \mathbf{X}^{n,t} + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^n - \frac{1}{nb(n)} \sum_{m \in \tau_{nb}(n)} (\mathbf{X}^{m,t} + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^m) \right\|^2 \quad (29)$$

Ce problème est résolu par une procédure itérative de type Jacobi. A chaque itération ν et pour chaque nœud interne n , le nouvel itéré de la vitesse nodale de maillage est calculé ainsi :

$$\mathbf{V}_{msh}^{n(\nu+1)} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{nb(n)} \sum_{m \in \tau_{nb}(n)} (\mathbf{X}^{m,t} + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^{m(\nu)}) - \mathbf{X}^{n,t} \right] \quad (30)$$

Régularisation des nœuds frontière, contrainte sur la conservation de volume

Une expression équivalente peut être obtenue pour les nœuds frontière, la sommation dans (29) et (30) étant toutefois restreinte à l'ensemble des nœuds voisins appartenant à la frontière du maillage. De plus et comme indiqué précédemment, une contrainte additionnelle de conservation de volume doit être satisfaite simultanément. Les flux de matière de la vitesse matérielle et de la vitesse de maillage à travers la frontière du maillage doivent être égaux :

$$\mathbf{v}_{msh} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{mat} \cdot \mathbf{n} \quad (31)$$

\mathbf{n} désignant le vecteur normale extérieure, unitaire. De façon à s'assurer que la relation (31) exprime bien la conservation de la matière pour le problème discret, nous utilisons dans cette relation les normales dites « consistantes » (de l'anglais *consistent*, cohérentes) définies aux nœuds frontière et suggérées initialement par Gray (1977) et Engelman et al. (1982). Ces vecteurs sont tels que tout vecteur vitesse nodale orthogonal au vecteur normale consistante fournit une contribution nulle au flux de matière à travers la surface discrétisée. En dimension 3, dans le cas d'éléments linéaires, le vecteur normale consistante¹ en un nœud

¹ Au vu de leur définition, le vocable normales « conservatives » nous semble plus approprié.

frontière m est défini par la moyenne des vecteurs normaux aux faces entourant le nœud, pondérée par les aires de ces facettes :

$$\tilde{\mathbf{n}}^m = \left\| \sum_{f \in \tau(m)} S^f \mathbf{n}^f \right\|^{-1} \sum_{f \in \tau(m)} S^f \mathbf{n}^f \quad (32)$$

$\tau(m)$ désignant l'ensemble des facettes triangulaires f dont le nœud m est un sommet, S^f étant l'aire de chaque facette f . La démonstration de (32) a été donnée (Bellet, 2001). En dimension 2, la même expression est valide, S^f désignant cette fois la longueur des côtés des deux arêtes dont le nœud frontière m est un sommet.

La condition (31) est imposée par une technique de pénalisation qui est appliquée localement en chaque nœud frontière. Etant donné un nœud frontière q , nous désignons par $\tau_{nb/s}(q)$ l'ensemble des nœuds frontière connectés à q , de cardinal $nb_{/s}(q)$. A chaque itération v , le nouvel itéré de la vitesse de maillage du nœud est défini par :

$$\mathbf{V}_{msh}^{q(v+1)} = \arg \min_{\mathbf{V}_{msh}^q} \left\{ \left\| \mathbf{X}^{q,t} + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^q - \frac{1}{nb_{/s}(q)} \sum_{m \in \tau_{nb/s}(q)} (\mathbf{X}^{m,t} + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^{m(v)}) \right\|^2 + \frac{\chi}{2} \left((\mathbf{V}_{msh}^q - \mathbf{V}_{mat}^q) \cdot \tilde{\mathbf{n}}^q \right)^2 \right\} \quad (33)$$

où le facteur de pénalisation χ est une constante positive élevée. Le nouvel itéré $\mathbf{V}_{msh}^{q(v+1)}$ est aisément obtenu comme la solution d'un système d'équations linéaires.

En dimension 3, la difficulté de la procédure réside surtout dans le traitement des nœuds qui sont au voisinage des arêtes aiguës ou des coins des moules, et/ou qui appartiennent à des plans de symétrie. Dans ce cas, la méthode locale de pénalisation est appliquée pour imposer (31) pour plusieurs vecteurs normaux.

La procédure itérative est répétée jusqu'à stagnation (c'est-à-dire jusqu'à ce que les corrections sur les vitesses nodales soient mineures) et le schéma suivant est appliqué pour actualiser la position des nœuds :

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{X}^t + \Delta t \mathbf{V}_{msh}^{(\infty)} \quad (34)$$

4.2.2 Traitement des termes d'advection

Connaissant le champ de vitesse de maillage, il est maintenant nécessaire de procéder à l'actualisation des différents champs nodaux. Prenons l'exemple de la température T . Son actualisation en chaque nœud peut s'écrire :

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \frac{\partial_{msh} T}{\partial t} \Delta t \quad (35)$$

avec $\partial_{msh} T / \partial t$ la dérivée temporelle de T par rapport au maillage (taux de variation de température en un nœud donné du maillage) qui est reliée à la dérivée matérielle par l'expression :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial_{msh} T}{\partial t} + (\mathbf{v}_{mat} - \mathbf{v}_{msh}) \cdot \nabla T \quad (36)$$

Dans la littérature, cette expression est utilisée la plupart du temps directement dans la forme faible de l'équation de conservation. Des techniques de décentrage amont de type Streamline Upwind - Petrov-Galerkin (SUPG) sont alors utilisées de façon à stabiliser les termes d'advection par introduction d'une diffusion artificielle selon les lignes de courant. Cette formulation est très classique (Brooks & Hughes, 1982) et nous ne la détaillerons pas ici.

Au cours de nos travaux, nous avons également testé une autre méthode, suggérée initialement dans (Chenot & Bellet, 1995) et dénommée « méthode d'upwind nodal ». Après résolution du problème thermique sur l'incrément (équation (24)), la dérivée matérielle de la température est connue en chaque nœud. Après calcul des vitesses \mathbf{v}_{mat} et \mathbf{v}_{msh} , l'actualisation du champ de température peut être obtenue en écrivant (35)–(36) en chaque nœud, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
T^{t+\Delta t} &= T^t + \Delta t \left(\frac{T_{Lag}^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t} - (\mathbf{v}_{mat} - \mathbf{v}_{msh}) \cdot \nabla T \right) \\
&= T_{Lag}^{t+\Delta t} - \Delta t (\mathbf{v}_{mat} - \mathbf{v}_{msh}) \cdot \nabla T
\end{aligned} \tag{37}$$

avec $T_{Lag}^{t+\Delta t}$ la température correspondant à l'actualisation lagrangienne du nœud considéré. En se référant à la Figure 4, cette expression apparaît comme le développement spatial au premier ordre du champ de température au voisinage de la position $\mathbf{x}_{Lag}^{t+\Delta t}$. La détermination de la nouvelle température $T^{t+\Delta t}$ du nœud nécessite la connaissance du seul gradient nodal de la température. Utilisant une technique de décentrage amont, ce gradient nodal est calculé dans l'élément amont par rapport au nœud, au sens de la vitesse d'advection $\mathbf{v}_{mat} - \mathbf{v}_{msh}$.

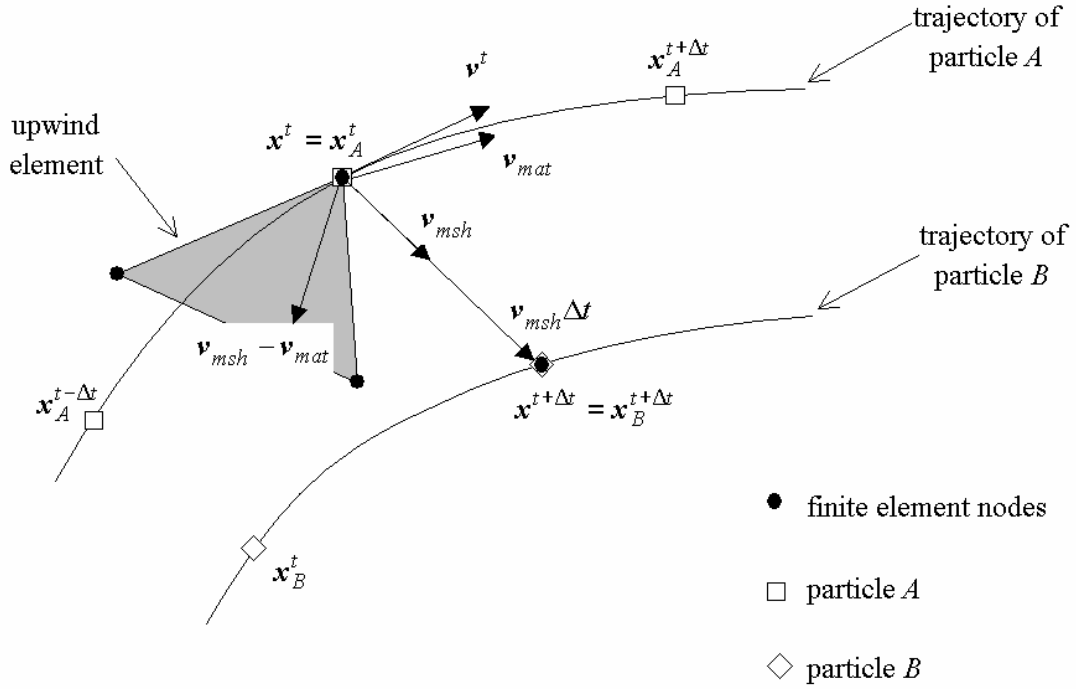


Figure 4. Schéma explicatif de la formulation ALE en dimension 2. Actualisation de la position d'un nœud du maillage d'éléments finis et identification de l'élément amont. La matérialisation de la trajectoire de deux particules matérielles A et B aide à interpréter l'équation (38).

Dans le cas d'une analyse de la macroségrégation des éléments d'alliage, la concentration des différents solutés est transportée de la même façon.

Afin d'exprimer les termes d'accélération dans l'équation d'équilibre dynamique, un transport du champ de vitesse matérielle est nécessaire. En effet, dans les équations (14)-(15), la vitesse $\mathbf{v}^{t-\Delta t}$ est la vitesse matérielle de la particule au précédent pas de temps. On a donc besoin d'effectuer un transport purement advectif du champ de vitesse après actualisation de la configuration. Ceci est effectué par un schéma similaire à (35)-(36), mais dans lequel la dérivée matérielle est prise égale à zéro :

$$\mathbf{v}^t(\mathbf{x}^{t+\Delta t}) = \mathbf{v}^t(\mathbf{x}^t) - [\nabla \mathbf{v}^t(\mathbf{x}^t)](\mathbf{v}_{mat}(\mathbf{x}^t) - \mathbf{v}_{msh})\Delta t \tag{38}$$

En se référant à la Figure 4, on peut voir que (38) n'est autre qu'un développement spatial au premier ordre du champ de vitesse matérielle dans l'élément amont associé à la position nodale \mathbf{x}^t .

Il est intéressant de noter que le calcul de $\mathbf{v}^t(\mathbf{x}^{t+\Delta t})$ peut également être effectué par la méthode des caractéristiques (Pironneau, 1988). Dans les simulations bidimensionnelles de remplissage de moules présentées plus loin, une variante simplifiée de cette méthode a été utilisée, que certains auteurs appellent « méthode pseudo lagrangienne ». Dans cette méthode, on utilise une actualisation lagrangienne de la configuration, notée $\Omega_{Lag}^{t+\Delta t}$ et définie par (16). Etant donné un point de position $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$, on détermine

l'élément e de $\Omega_{Lag}^{t+\Delta t}$ qui le contient, ainsi que les coordonnées locales (ξ, η) dans l'élément. Par conséquent, $\Omega_{Lag}^{t+\Delta t}$ étant une actualisation matérielle du domaine Ω^t , la vitesse $\mathbf{v}^t(\mathbf{x}^{t+\Delta t})$ est calculée au moyen d'une interpolation directe dans l'élément e de Ω^t :

$$\mathbf{v}^t(\mathbf{x}^{t+\Delta t}) = N_n(\xi, \eta) \mathbf{V}^{n,t} \quad (39)$$

où N_n désigne la fonction d'interpolation associée au nœud n .

4.2.3 Précision du schéma de transport de type « upwind nodal »

Le transport de type upwind nodal tel que décrit précédemment s'est avéré précis à condition que Δt satisfasse la condition :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \max_m \frac{h^e}{\|\mathbf{V}_{mat}^m - \mathbf{V}_{msh}^m\|} \quad (40)$$

où h^e est la distance du nœud m à la face opposée dans l'élément amont, selon la direction $\mathbf{V}_{mat}^m - \mathbf{V}_{msh}^m$.

Nous avons démontré dans la thèse d'Olivier Jaouen (1998), que cette condition peut être rendue moins restrictive en divisant l'opération de transport sur l'incrément $[t, t+\Delta t]$ en n sous-pas $[t, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t+\Delta t]$, avec $t_i = t + i\Delta t_{\max}$ (la condition (40) s'appliquant donc sur chacun des sous-pas). En pratique, sur des écoulements académiques à nombres de Rayleigh valant 10^4 , ce qui couvre le domaine des mouvements de convection thermo-solutale en fonderie, le nombre de sous-pas ne doit pas excéder 5 de façon à conserver une précision suffisante. Cette stratégie a été validée sur le benchmark bien connu de la cavité carrée affectée de mouvements de convection naturelle (De Vahl Davis & Jones, 1983). Une cavité de côté 1 m est maillée en 3D, le maillage non structuré en tétraèdres ne comportant qu'un élément dans son épaisseur et étant limité par deux plans de symétrie parallèlement à la surface de la cavité. La taille des éléments tétraèdres est uniforme, égale à 2,6 cm. Le pas de temps est constant égal 0,25 s. Les résultats correspondant à un nombre de Prandtl de 0,71, et deux nombres de Rayleigh 10^3 et 10^4 , sont donnés dans le table 1. Tandis que la condition (40) est satisfaite pour $Ra=10^3$ ($\Delta t/\Delta t_{\max}=0,63$), quatre sous-pas sont utilisés ($\Delta t/\Delta t_{\max}=3,38$) pour le cas $Ra=10^4$, ce qui préserve une bonne précision.

	$Ra=10^3$		$Ra=10^4$	
	De Vahl Davies & Jones	Présent travail	De Vahl Davies & Jones	Présent travail
$\max(v_x)$	3.649	3.634	16.178	16.099
z	0.813	0.811	0.823	0.814
$\max(v_z)$	3.697	3.669	19.617	19.413
x	0.178	0.183	0.119	0.108

Tableau 1 : Valeurs maximales des composantes de vitesse (m/s) pour le test de la cavité carrée en convection naturelle (De Vahl Davis & Jones, 1983).

4.2.4 Coexistence de régions lagrangiennes et eulériennes-lagrangiennes

En ce qui concerne le traitement global d'une pièce en cours de solidification, l'idée directrice consiste à définir les régions solidifiées comme lagrangiennes (maillage convecté avec la matière) et les régions liquides ou pâteuses comme eulériennes-lagrangiennes (maillage régularisé sous la contrainte (31)). Par conséquent, chaque nœud du maillage est traité soit en formulation lagrangienne, soit en ALE selon la règle suivante illustrée à la Figure 5.

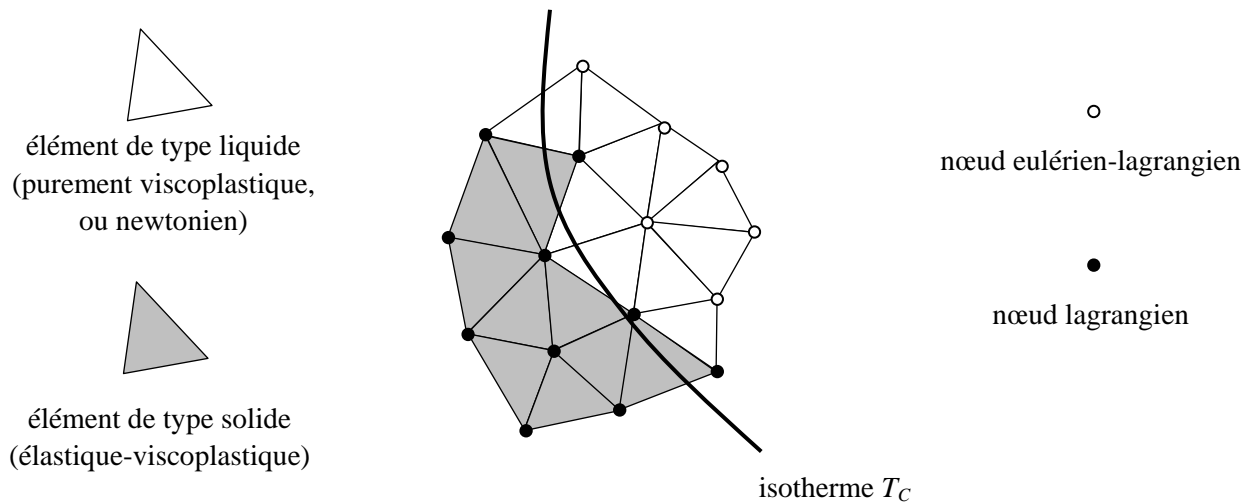


Figure 5. Nœuds lagrangiens et eulériens-lagrangiens, le statut étant déterminé par l'appartenance aux éléments de type liquide ou solide. Schéma en dimension 2.

- ✓ Tout nœud appartenant à au moins un élément de type solide (c'est-à-dire un élément dont la température au centre est inférieure à T_C et dont la loi de comportement est par conséquent élasto-viscoplastique, voir section 3.1.1) est traité comme lagrangien : sa vitesse de maillage est égale à sa vitesse matérielle.
- ✓ Tous les autres nœuds, qui par conséquent n'appartiennent qu'à des éléments de type fluide, sont traités comme eulériens-lagrangiens : leur vitesse de maillage est calculée comme indiqué à la section 4.2.1.

Cette formulation ALE empêche le maillage de dégénérer lorsqu'un écoulement de convection naturelle s'établit dans la partie non solidifiée de la pièce. Elle permet également de suivre l'évolution de la surface libre des parties restées liquides et donc de modéliser les défauts de type retassure primaire.

5 EXEMPLES D'APPLICATION DE LA FORMULATION THERMOMECHANIQUE EULERIENNE-LAGRANGIENNE

5.1 REMPLISSAGE DE MOULES DE FONDERIE

Au CEMEF, nous avons commencé à travailler sur ce thème en collaboration avec Frédéric Muttin dans le cadre d'une simulation bidimensionnelle en formulation lagrangienne (Muttin et al., 1993), puis avec Alima Kamara lors de ses travaux de thèse sur l'implantation d'un modèle de turbulence de type $k-\varepsilon$ (Kamara, 1994). C'est ensuite au cours de la thèse de Laurence Gaston que la formulation précédemment décrite a été développée et appliquée, toujours en dimension 2 (Gaston et al., 2000). La formulation est alors de type lagrangien actualisé, le maillage ne couvrant que le domaine effectivement occupé par le fluide. Outre la procédure ALE précédemment exposée, cela nécessite de maîtriser l'évolution du maillage : des algorithmes ont été développés pour détecter les replis de matière se produisant lors de convergences d'écoulements ou de contournement d'obstacles, et pour contrôler les phases de remaillage associées. Cette étude a donné lieu à des expériences de validation concluantes sur maquette hydraulique au laboratoire, que nous présentons ci-après.

5.1.1 Modélisation bidimensionnelle d'un remplissage de moule

Nous décrivons brièvement les résultats présentés plus en détail dans (Gaston et al., 2000) à la section 11. Des calculs effectués en dimension 2 avec le code R2SOL ont été comparés avec des résultats obtenus sur maquette hydraulique, pour laquelle l'écoulement peut être observé aisément à travers un moule en plexiglas® et enregistré à l'aide d'une caméra vidéo numérique. L'équipement expérimental est présenté à la Figure 6. La cavité à remplir est carrée, de dimension 320 mm et d'épaisseur 20 mm.

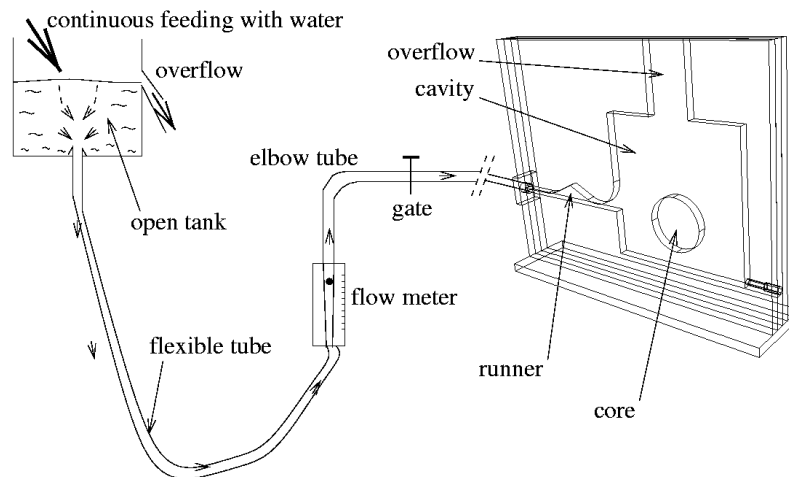


Figure 6. Schéma de l'expérience sur maquette hydraulique conçue au CEMEF.

La simulation a été conduite en utilisant les éléments triangulaires à 6 nœuds, de type P2+/P1 alors disponibles dans R2SOL, le solveur mécanique étant de type Uzawa (solutions alternées sur le champ de pression et le champ de vitesse). Le modèle statistique de turbulence $k-\varepsilon$ (version standard) a également été utilisé, du fait des vitesses élevées mesurées dans le canal d'alimentation, le nombre de Reynolds nominal étant de 20000 environ (pour plus de précision sur ce point, voir (Gaston et al., 2000)).

La Figure 7 montre une comparaison entre l'écoulement simulé et celui enregistré sur la maquette. Compte tenu de certaines composantes tridimensionnelles de l'écoulement, qui ne peuvent donc être intégrées dans le modèle 2D (notamment le mouillage des parois latérales du moule par le fluide), l'accord de la simulation avec l'expérience est de bonne qualité. On perçoit très bien à la fois l'intérêt et la difficulté de cette formulation dans laquelle seul l'espace occupé par le fluide est maillé : très bonne description des surfaces libres, difficile gestion du maillage.

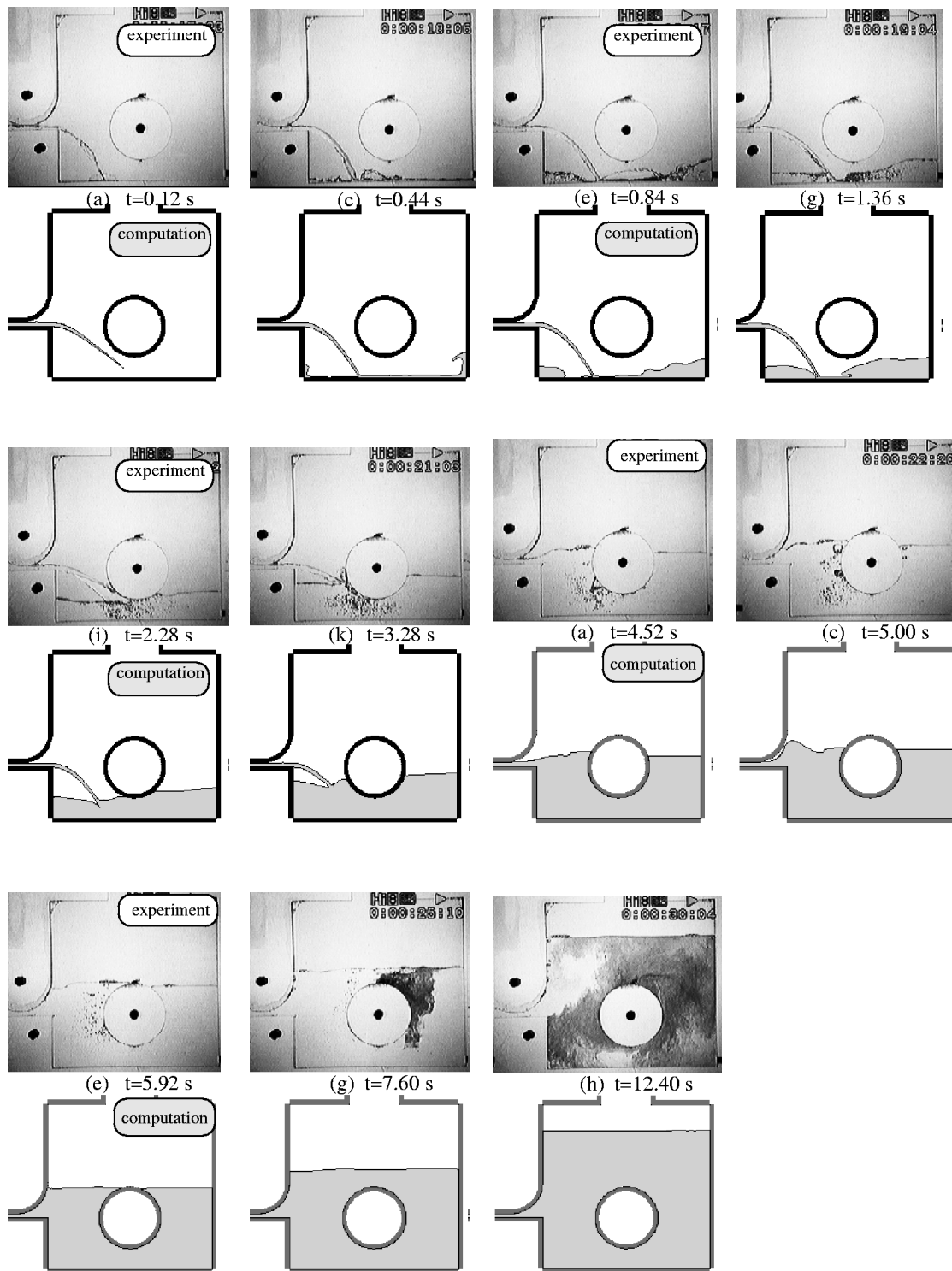


Figure 7. Ecoulement de remplissage de moule obtenu avec une maquette hydraulique. Comparaison entre l'écoulement réel et sa simulation par éléments finis, avec le modèle de turbulence $k-\varepsilon$. La formulation éléments finis est de type lagrangien réactualisé : sur cette figure, seul le domaine effectivement occupé par le fluide est maillé (zones grises).

5.1.2 Modélisations tridimensionnelles

Les travaux de Chantal Bahloul et Serge Moto Mpong se sont inscrits dans la continuité des précédents (Bahloul-Massip, 2000 ; Moto Mpong, 2002). La méthode ALE a été étendue en dimension 3, en association avec l'utilisation des éléments tétraèdres linéaires présentés précédemment. Cette formulation a également été complétée par la prise en compte des effets de tension de surface, en incluant les effets de mouillage de la paroi par le fluide. Si ces travaux ont donné lieu à des résultats intéressants comme le calcul

du rayon de courbure moyen d'une surface discrétisée en triangles, ainsi que le calcul des normales conservatives évoquées au paragraphe 4.2.1 (Bellet, 2001), ils ont clairement mis en évidence les limites de l'approche en tridimensionnel. Dans ce cas, la gestion du maillage lors des convergences d'écoulement devient en effet extrêmement complexe. Les calculs restent possibles en géométries relativement simples, mais la robustesse nécessaire à l'application industrielle ne peut être garantie.

En conséquence, une solution alternative a été mise en place en adaptant le logiciel eulérien REM3D[®], initialement développé au laboratoire pour la simulation de l'injection des thermoplastiques (Pichelin & Coupez, 1998), à la simulation des écoulements de liquide en fonderie. REM3D[®] comprend un solveur de type Stokes, utilisant les mêmes éléments finis tétraèdres et l'équation d'advection $d\chi/dt = 0$, qui gouverne l'avancée du front de matière, est résolue par une formulation espace-temps de type Taylor-Galerkin discontinu (Batkam et al., 2004). Il est à noter que pour réduire la diffusion numérique inhérente à ce type de formulation, le logiciel inclut un raffinement dynamique du maillage au voisinage du front de matière. Le maillage est donc mobile et la formulation de type ALE.

Les travaux de thèse d'Estelle Saez ont consisté en cette adaptation. Tout d'abord, contrairement aux polymères, gravité et inertie gouvernent les écoulements des alliages métalliques à l'état liquide. Par ailleurs, du fait de la très faible épaisseur des couches limites en paroi, où les taux de cisaillement sont très élevés, la condition de contact collant, bien adaptée au cas des polymères, ne peut plus être retenue. Il convient d'introduire une condition de contact glissant avec loi de frottement (ou loi de paroi). On pourra consulter (Saez, 2003) ou (Bellet et al., 2004c) pour plus de détails sur ces différents points. Nous donnons ci-après deux exemples d'application.

Remplissage du moule d'une roue en acier

La société Aubert et Duval Alliages a étudié expérimentalement le remplissage du moule d'une roue en acier, pièce destinée à équiper une plateforme off-shore de forage pétrolier (Figure 8). Le moule en sable a été équipé de onze fusibles, traversés par un courant électrique jusqu'à leur fusion au passage du front de métal. Cette technique permet d'avoir une assez bonne représentation du mode de remplissage du moule. Le temps de remplissage moyen est de 15 secondes environ.

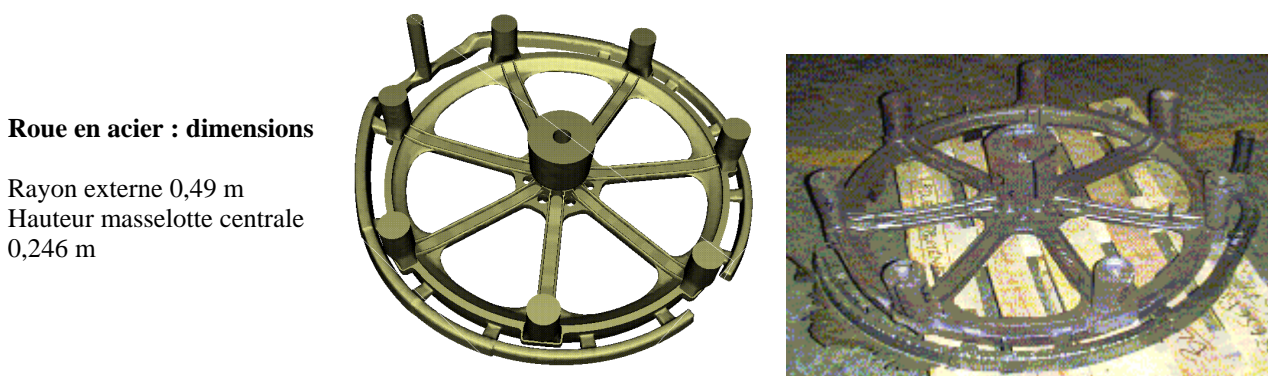


Figure 8. Dimensions et description CAO du moule de la roue étudiée. Aspect de la pièce après coulée.

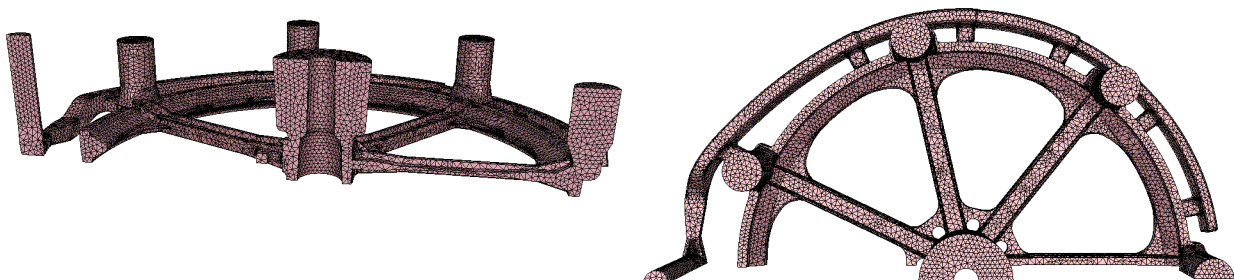


Figure 9. Maillage en éléments finis (35000 noeuds, 141000 tétraèdres).

Le maillage en éléments finis est montré à la Figure 9. Les données suivantes ont été utilisées : masse volumique 7500 kg m^{-3} , viscosité cinématique $5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (valeur arbitrairement exagérée pour simuler des effets de turbulence, les calculs effectués avec REM3D® n'intégrant pas encore de modèle de turbulence). Le pas de temps est constant, égal à 10^{-3} s . Un débit constant est imposé, correspondant à une vitesse moyenne à l'entrée de $0,955 \text{ m s}^{-1}$. Comme montré à la Figure 10, l'avancée du front de métal dans le moule est en assez bon accord avec les mesures.

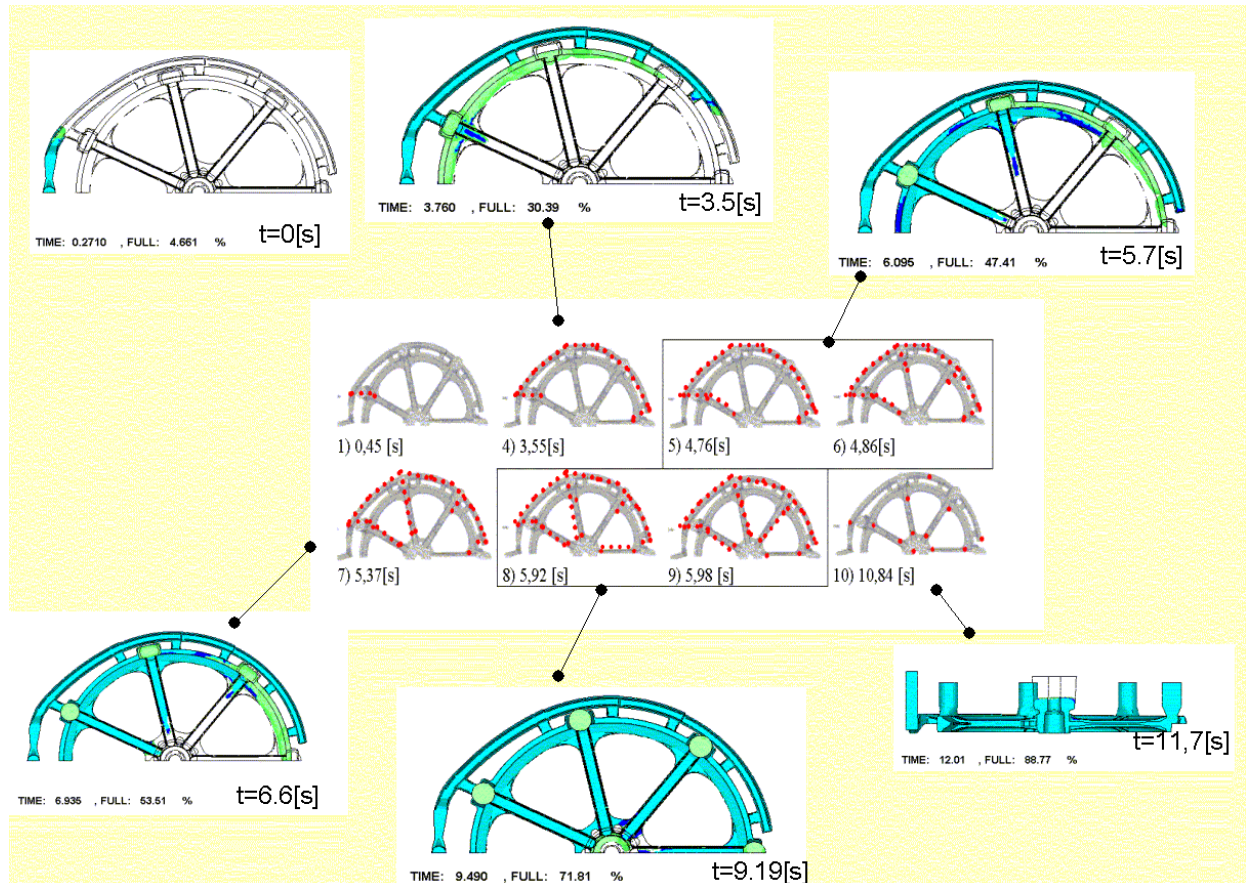


Figure 10. Comparaison entre l'écoulement simulé et les temps auxquels sont atteints les fusibles. Les fusibles fondus sont indiqués par des points rouges sur la figure centrale. La surface iso-valeur $\chi = 1/2$ apparaît en vert.

Remplissage d'une pièce en aluminium : benchmark Campbell

Ce test a été spécialement dessiné par John Campbell, professeur à l'université de Birmingham, pour mettre à l'épreuve les logiciels de simulation numérique (Sirrel et al., 1995). La géométrie, effectivement tridimensionnelle, est volontairement simple (Figure 11). Cependant, elle a été déterminée pour induire des phénomènes rencontrés fréquemment en remplissage de moules, tels que chute libre, emprisonnement d'air, recirculations de métal liquide, tourbillons associés à un écoulement turbulent, vagues se réfléchissant sur les parois des moules.

Données pour la simulation

Masse volumique	2385 kg m^{-3}
Viscosité cinémat.	$10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Pas de temps	10^{-3} s

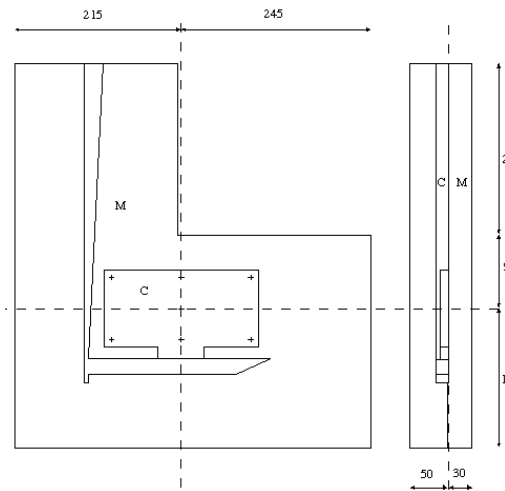
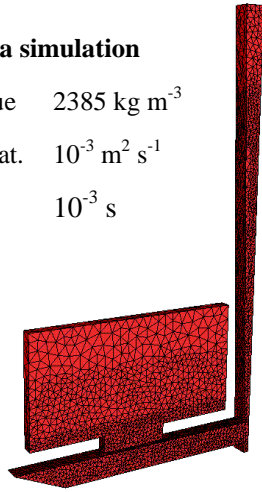


Figure 11. Géométrie du benchmark de remplissage proposé par John Campbell (dimensions en mm).

Le moule est rempli avec de l'aluminium pur, dont la température à l'entrée est estimée à 700°C . Le remplissage est opéré à partir d'un bassin dont le niveau est maintenu constant, grâce à un trop-plein, à une hauteur $h = 40 \text{ mm}$ au-dessus de l'entrée du canal d'alimentation. Par conséquent, on impose une pression constante à cet endroit, égale à ρgh . Le temps de remplissage expérimental se situe entre 1,75 et 2 secondes, et la reproductibilité de l'essai est globalement acceptable (elle est très bonne dans la première partie du remplissage, moins bonne lorsque l'écoulement débouche dans la cavité parallélépipédique). La Figure 12 illustre la comparaison entre l'écoulement calculé et la réalité, connue par acquisition d'images de radiographie X (Sirrel et al., 1995).

On observe un très bon accord entre écoulement réel et simulation numérique. Le temps de remplissage est le même. Plus précisément, la simulation effectuée retrouve les phénomènes jugés les plus discriminants par Campbell pour juger de la qualité d'une simulation, à savoir le fait que le canal d'alimentation reste non saturé dans sa partie horizontale pendant une bonne partie du remplissage (images 2 à 4 de la Figure 12), ainsi que des recirculations qui apparaissent ensuite dans ce même canal et à l'entrée de la cavité (Figure 13).

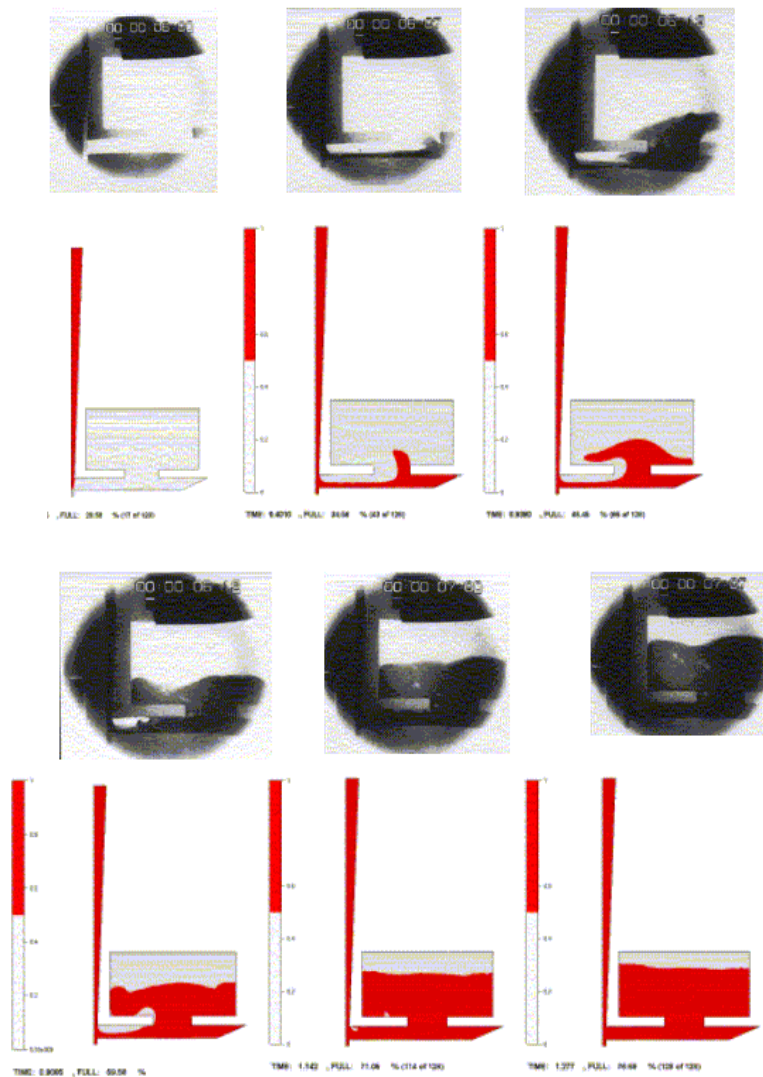


Figure 12. Comparaison entre les images de radiographie X (Sirrel et al., 1995) et la simulation au moyen de REM3D® pour différents instants : 0,24 ; 0,5 ; 0,74 ; 1,0 ; 1,24 et 1,5 s.

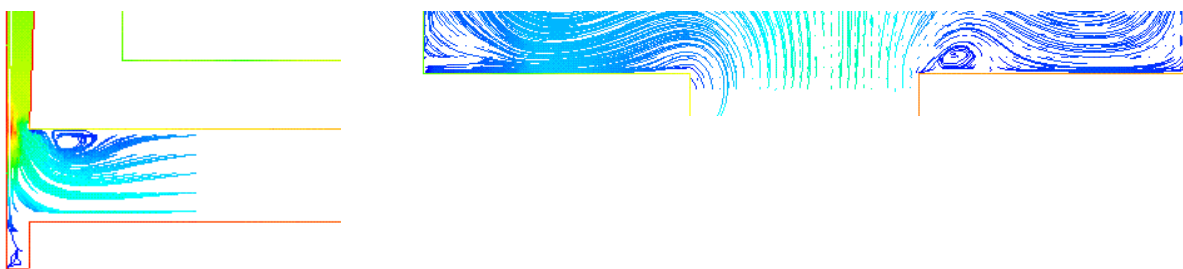


Figure 13. Détails de l'écoulement calculé : tourbillons de recirculation dans le canal d'alimentation ainsi qu'à l'entrée de la cavité.

5.2 SOLIDIFICATION DE GROSSES PIÈCES AVEC SUIVI DE SURFACE LIBRE ET CONVECTION DU LIQUIDE

On trouvera dans l'article (Bellet & Fachinotti, 2004), inséré dans le présent document à la section 11, des exemples de calcul du refroidissement thermomécanique de grosses pièces coulées, dont la simulation tridimensionnelle d'un élément d'électro-aimant d'un poids de 125 tonnes pour Industeel Creusot.

Dans cette partie, nous présentons la simulation de la solidification d'un lingot en acier de 3,3 tonnes, coulé par Aubert et Duval Alliages. La géométrie axisymétrique est montrée à la Figure 14. La configuration comprend cinq sous-domaines : le lingot (hauteur 1,83 m, rayon maximum 0,331 m) et quatre composants du moule. Une simulation thermomécanique de la solidification et du refroidissement est effectuée à l'aide du logiciel bidimensionnel R2SOL. La discrétisation du lingot est constituée d'environ 7200 éléments, dont la taille varie de 2,5 à 30 mm. En première approche, le moule est considéré indéformable. Les échanges thermiques sont modélisés de la façon suivante. Lorsqu'une lame d'air apparaît, d'épaisseur locale δ , l'échange thermique entre le lingot et la lingotière est gouverné par la conduction à travers l'air et par le rayonnement. On a ainsi l'expression suivante pour le coefficient d'échange thermique h :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_{cond} + h_{rad}} \quad \text{avec} \quad h_{cond} = \frac{\lambda_{air}}{\delta} \quad \text{et} \quad h_{rad} = \sigma_r \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} - 1)} \quad (41)$$

où λ_{air} désigne la conductivité thermique de l'air, T_1 et T_2 les températures respectives de la surface du lingot et de la lingotière, ε_{r1} et ε_{r2} leurs émissivités respectives et σ_r la constante de Stefan-Boltzmann.

Par ailleurs, afin de rendre compte des mouvements de convection du liquide (convection naturelle due aux gradients thermiques et à la dépendance en température de la masse volumique), nous avons pris une viscosité aussi faible que possible pour le liquide, égale à 1 Pa s dans le cas présent. Pour cette valeur de viscosité, il a été nécessaire d'introduire une stabilisation de la surface libre pour éviter la dégénérescence continue du maillage. Ceci a été fait sous forme d'une condition de planéité, requise pour les côtés du maillage ayant une consistance viscoplastique faible (en pratique les côtés à forte fraction liquide). Pour un tel côté on impose que ses deux nœuds aient le même déplacement selon la direction verticale. Pour cela, on définit dans un premier temps une fonctionnelle à minimiser,

$$\Phi^{contr_surf} = \sum_{\text{côtés critiques}} \frac{1}{2} \chi_{cs} (z^{1,t+\Delta t} - z^{2,t+\Delta t})^2 \quad (42)$$

où $z^{i,t+\Delta t}$ désigne la coordonnée spatiale z du $i^{\text{ème}}$ nœud du côté considéré, en fin d'incrément et où χ_{cs} est un réel positif arbitrairement élevé. On ajoute ensuite au résidu des puissances virtuelles, un terme qui correspond à la dérivée de cette fonctionnelle par rapport au champ de vitesse, qui doit s'annuler à la solution. La dérivation par rapport au champ de vitesse est immédiate, en considérant le schéma temporel d'intégration (16).

L'avancement de la solidification est montré à la Figure 14, qui illustre le calcul simultané de l'écoulement liquide, sous l'effet de la convection naturelle d'origine thermique, ainsi que la déformation du solide, due au retrait à la solidification et à la contraction thermique en phase solide. On constate clairement sur la figure la baisse du niveau de la surface libre en haut du lingot, qui résulte du retrait à la solidification, ainsi que de la contraction thermique du solide et du liquide. On distingue également la formation d'une lame d'air entre la surface du lingot et la lingotière. Elle est de l'ordre de 3 mm autour du corps du lingot, et atteint un maximum de 25 mm au niveau de l'épaule, ce qui correspond aux mesures effectuées par Aubert et Duval Alliages. Toutefois, la profondeur de la retassure est de 34 mm, sensiblement inférieure aux mesures (80 mm).

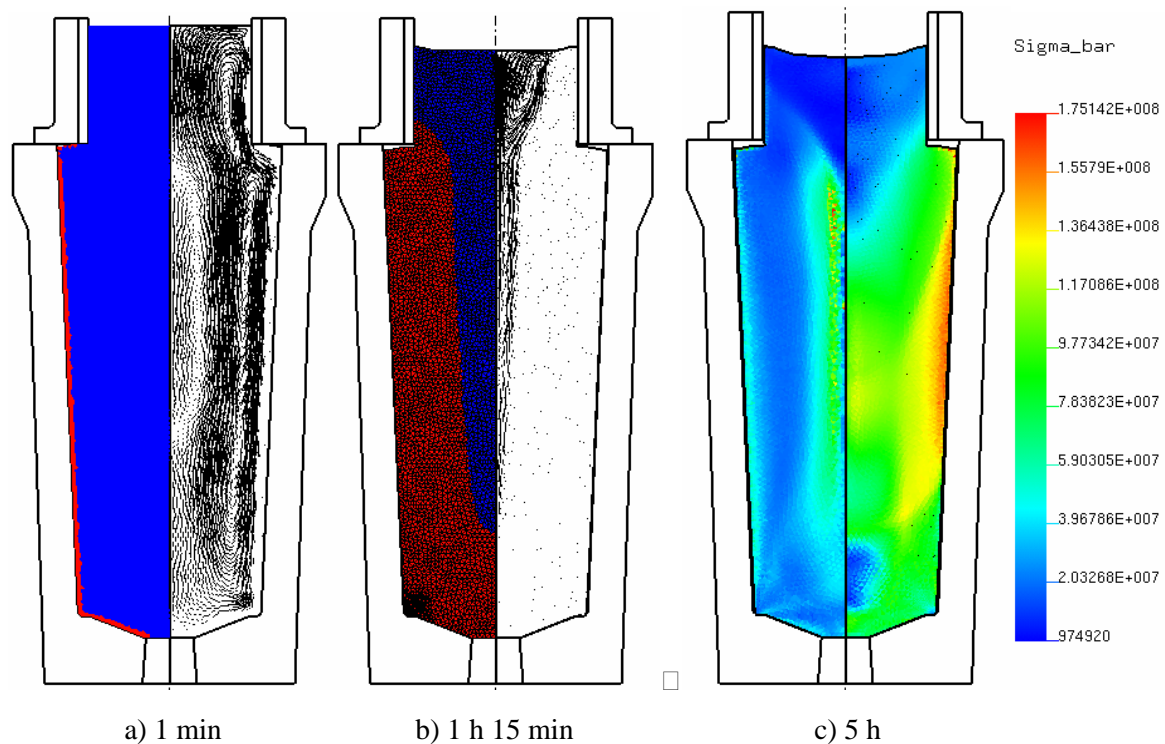


Figure 14. Illustration de la solidification d'un lingot d'acier axisymétrique de 3,3 tonnes. a) éléments de type liquide (bleu ou gris clair) et solide (rouge ou gris foncé) et vecteurs vitesse à 1 min (maximum 37,8 mm/s). b) idem avec superposition du maillage utilisé, à 1 h 15 min (vitesse maximum 1 mm/s). c) distribution de la déformation plastique cumulée et de la contrainte équivalente de von Mises (Pa) après 5 h (solidification complète atteinte après 3 h 25 min).

Au total les lames d'air créées représentent un volume non négligeable et il est intéressant de comparer la simulation précédente à un calcul plus restrictif dans lequel on n'autoriserait pas leur création. Dans ce second calcul, on impose donc une condition de contact bilatéral glissant, sans décollement, en modifiant légèrement la formulation du contact pénalisé. La comparaison des résultats est montrée à la Figure 15. Comme le montre la figure, l'impact de cette hypothèse est considérable sur les résultats, en terme de cinétique de refroidissement (la fin de solidification survient une heure plus tôt dans le calcul sans lame d'air), mais aussi pour la forme de la retassure primaire, beaucoup plus creusée dans le cas du contact bilatéral.

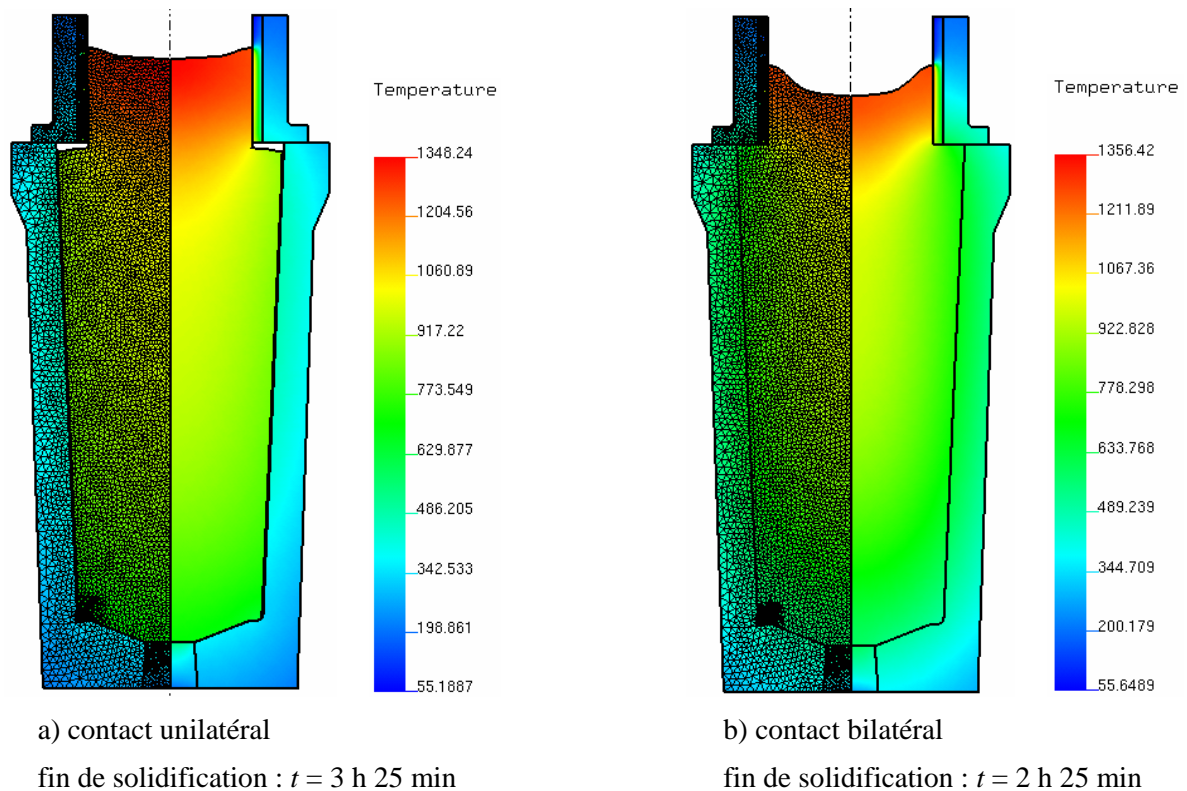


Figure 15. Comparaison entre calcul avec contact unilatéral et échange thermique variable, dépendant de l'épaisseur de la lame d'air (à gauche) et calcul avec contact bilatéral, donc sans lame d'air, et avec coefficient d'échange thermique constant (à droite). Dans les deux cas, la configuration montrée est celle de fin de solidification.

A la Figure 16 la même comparaison est effectuée, mais dans le cas d'un lingot d'acier de Industeel Creusot, beaucoup plus volumineux (hauteur 5 m, rayon max 1,40 m, 164 tonnes coulées). La comparaison est évidemment plus spectaculaire. L'effet de blocage de la matière à la périphérie du lingot, du fait du contact bilatéral, fait se creuser dramatiquement la retassure primaire jusqu'à la moitié de la hauteur du lingot. Les déformations et contraintes sont considérablement plus élevées.

A l'issue de ces deux comparaisons, il apparaît nettement que toute simulation thermomécanique du refroidissement des grosses pièces de fonderie doit impérativement intégrer la gestion du contact unilatéral avec les éléments moulants. De plus, on voit que cette prise en considération est nécessaire pour la prédiction de la forme de la retassure primaire. De ce point de vue, par rapport à la littérature actuelle, on ne peut qu'être critique par rapport à des simulations qui prétendraient prédire la forme de cette retassure sur la base de calculs purement thermiques, ou thermomécaniques mais sans prise en compte d'une interaction réaliste entre pièce et moule.

Notons pour finir que nous avons profité de ces comparaisons pour vérifier le bilan matière lors de telles simulations. Dans tous les cas présentés, l'erreur sur la conservation de la masse est inférieure à 0,7 %.

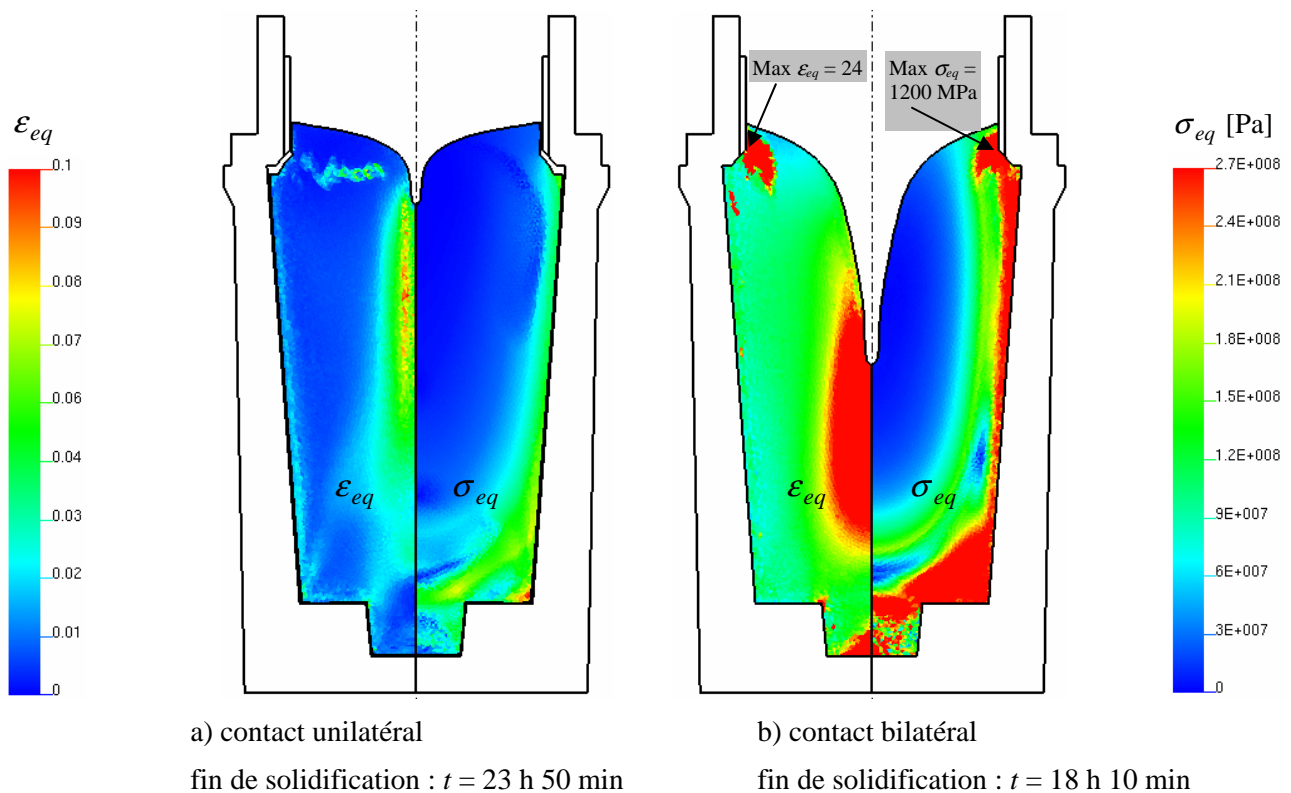


Figure 16. Comparaison entre calcul avec contact unilatéral (a) et bilatéral (b) pour un lingot d'acier de 165 tonnes. La distribution de déformation plastique équivalente est indiquée sur la partie gauche de la section du lingot et celle de contrainte équivalente sur la partie droite.

5.3 SOLIDIFICATION DES DISQUES DE FREIN : UN EXEMPLE D'INTERACTION THERMOMECHANIQUE FORTE ENTRE PIERCE ET MOULE

Cette section est en grande partie extrait d'un article paru dans la revue « Fonderie Fondeur d'Aujourd'hui » (de La Chapelle et al., 2004).

PSA - Peugeot Citroën utilise THERCAST[®] afin de prédire la déformation de pièces coulées et en particulier l'influence de la déformation de noyaux en sable sur la géométrie finale de la pièce. Ce type de prédiction nécessite un calcul thermomécanique sur la pièce mais également sur les éléments moulants. La pièce simulée est un disque de frein ventilé en fonte, coulé verticalement en moules en sable. Un des points d'intérêt est la détermination de la déformation des ailettes du disque en fin de refroidissement. Cette dernière provient directement de la déformation du noyau lors de la solidification. La simulation a été mise en place de manière à être la plus représentative possible de l'environnement réel. La pièce, le noyau et les moules ont donc été maillés en respectant la géométrie exacte (Figure 17). Une simulation thermomécanique couplée associant pièce et éléments moulants a été mise en œuvre afin de pouvoir observer l'influence de la déformation du noyau sur la forme de la pièce. Le scénario réel du refroidissement a été reproduit : refroidissement de 45 min en moules puis décochage et refroidissement à l'air libre pendant ¼ heure. La Figure 18 montre l'évolution temporelle de la température pour différents points localisés sur une coupe horizontale située à mi-hauteur du disque. L'historique thermique met bien en évidence les différents phénomènes physiques qui se produisent lors du refroidissement : la solidification (vers 2 min de refroidissement), le changement de phase à l'état solide de la fonte (vers 25 min de refroidissement), le décochage de la pièce qui conduit à une accélération du refroidissement (à 45 min de refroidissement). La déformation du noyau a été simulée et le flambage des ailettes est représenté sur la Figure 19 (le facteur d'amplification de la déformation est de 200). Les ailettes du noyau sont soumises à de très hautes températures qui conduisent à une dilatation du sable et donc à leur déformation. Leurs extrémités étant

maintenues de chaque côté par les moules, la déformation est localisée au niveau de l'ailette et conduit alors à une différence d'épaisseur entre les deux pistes du disque. Dans ce calcul, le comportement mécanique du sable a été simplifié par l'utilisation d'une loi thermo-élastique à coefficients thermo-dépendants.

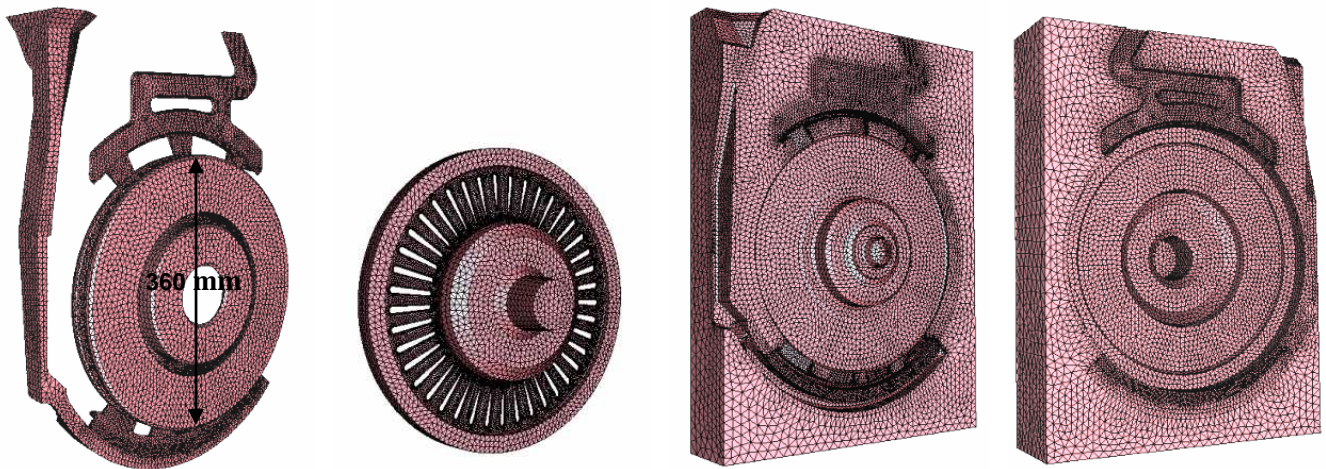


Figure 17. Maillages des différents domaines : la pièce, le noyau et les deux moules.

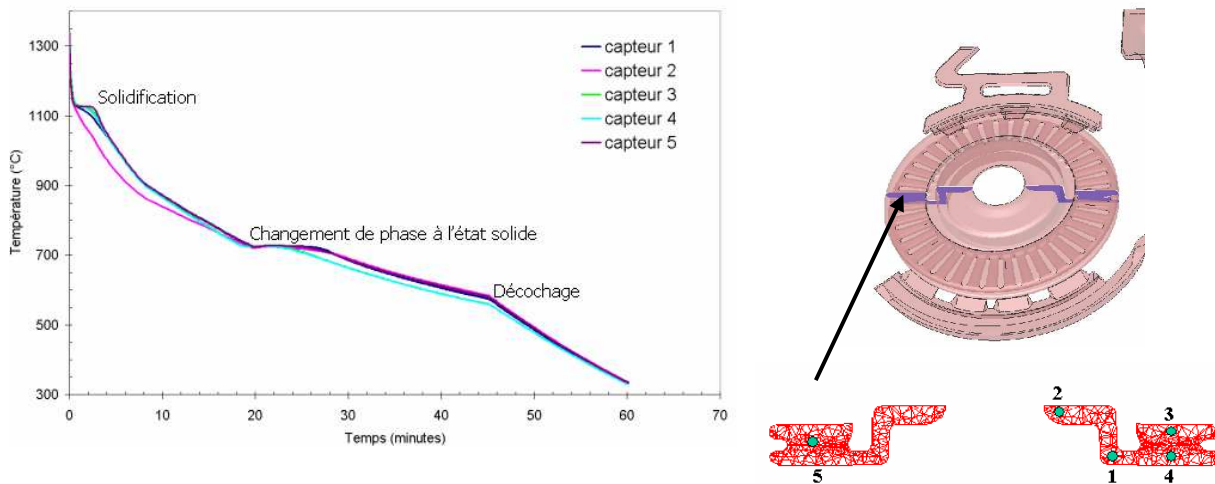


Figure 18. Evolution temporelle de la température de la pièce en différents points localisés suivant le plan de coupe présenté.

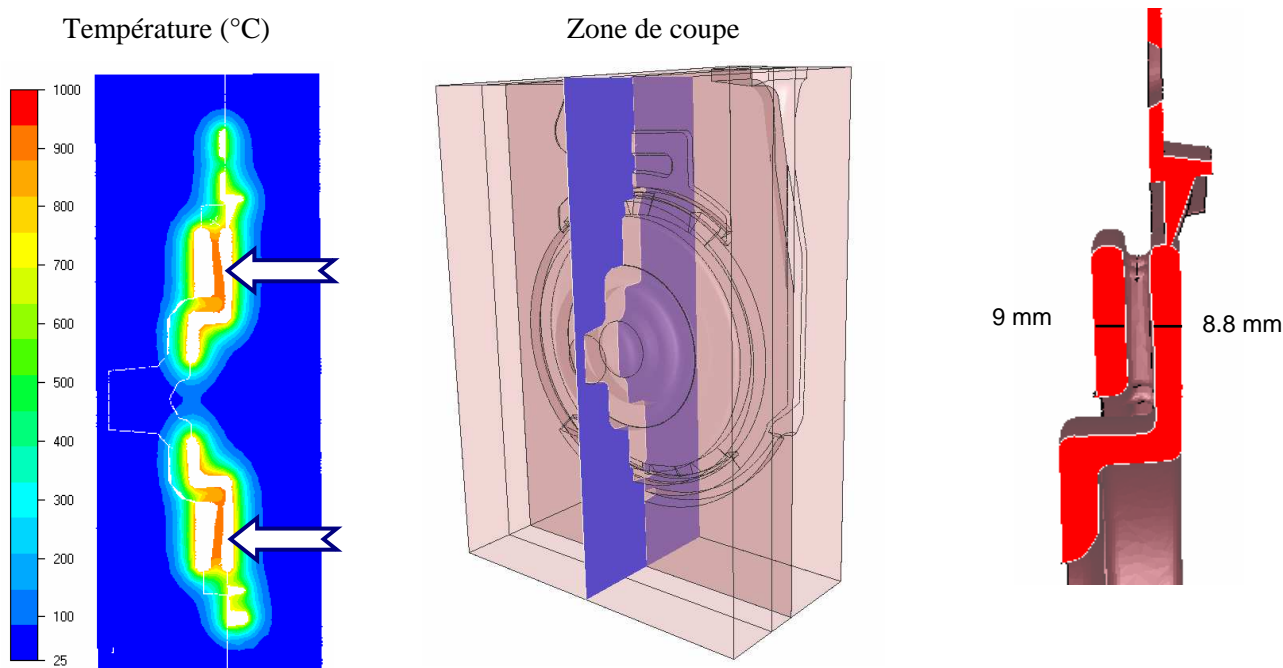


Figure 19. Représentation de la déformation des ailettes du noyau au sein des moules suivant une coupe de plan vertical, après 3 secondes de refroidissement. Sur la figure de gauche les déplacements sont amplifiés d'un facteur 200 et la distribution de température est superposée. A droite, différence d'épaisseur entre les deux pistes du disque.

D'autre part, sur des disques de frein non ventilés (pleins), des calculs analogues ont été menés par PSA et des comparaisons ont été faites avec des mesures de contraintes résiduelles effectuées en diffraction de rayons X et de neutrons sur les disques bruts de fonderie (David & Auburtin, 2002). Comme montré à la Figure 20, les résultats en terme de niveau et de répartition spatiale des contraintes sont tout à fait cohérents avec les mesures : contraintes radiales comprises entre ± 10 MPa, contraintes tangentielles de traction en bord de piste (de 40 à 60 MPa) et de compression au centre (environ -40 MPa).



Figure 20. Etat de contraintes dans un disque plein, en fonte, suivant une coupe de plan vertical. Ligne du haut (en vert) : valeurs prédites par le calcul. Ligne du bas (en bleu) : valeurs mesurées.

5.4 THERMOMECHANIQUE DE LA COULEE CONTINUE D'ACIERS

Dans le procédé de coulée continue, très répandu en sidérurgie pour fabriquer des demi-produits tels que billettes, blooms ou brames, l'acier est coulé en continu dans une lingotière sans fond, qui assure la solidification de la peau. Le produit est alors extrait au moyen de rouleaux et refroidi jusqu'à solidification complète. L'analyse thermomécanique 3D du procédé représente pour la simulation numérique un défi qui n'a pas encore pu être relevé à ce jour. Tout d'abord, on retrouve comme pour les autres procédés de solidification la difficulté de modéliser le comportement des aciers sur une très large gamme de température. Ensuite, il est nécessaire d'effectuer les calculs sur des domaines très étendus. En effet, à cause de la faible diffusivité thermique des aciers, la solidification n'est complète qu'après des distances parcourues dans la machine de l'ordre de 20 mètres dans le cas classique de la coulée de brames épaisses, dont la section transverse est typiquement de 2000 x 200 mm. Relever ce défi reste très important pour améliorer la

compréhension du procédé et contribuer à son optimisation. Par exemple la connaissance de la température, des déformations et contraintes est requise pour évaluer le risque d'apparition de défauts tels que les criques à cœur ou en surface du produit. La simulation aiderait à concevoir un dessin optimisé des machines (conditions de cintrage et de décintrage du produit, dimension et espacement des rouleaux de soutien) et à déterminer des paramètres de fonctionnement optimaux en fonction de la machine et des nuances d'aciers coulés (température et vitesse de coulée, intensité du refroidissement par jets d'eau).

Dans les thèses d'Alban Heinrich (Heinrich, 2003) et de Frédéric Costes (Costes, 2004), le concept de loi de comportement hybride liquide/solide a été appliqué au cas de la coulée continue avec pour objectif le développement d'une simulation thermomécanique globale du procédé, capable de fournir une description correcte de l'état thermomécanique dans la zone de refroidissement secondaire, particulièrement dans la région de fin de solidification. En rupture avec les méthodes de translation de tranche à travers la machine, courantes dans la littérature mais trop imprécises du point de vue mécanique, nous avons développé une stratégie de modélisation globale instationnaire dans laquelle on fait croître le maillage d'éléments finis (initialement restreint à la région de la lingotière) jusqu'à obtenir le régime stationnaire. Pour cela, les travaux d'Alban Heinrich (en 2D) et de Frédéric Costes (en 3D) ont porté sur le remaillage automatique local (restreint à une partie du maillage seulement, en l'occurrence la zone de haut de lingotière), sur le contact par pénalisation pour gérer l'interaction entre le produit coulé et les rouleaux de soutien et sur le calcul parallèle, nécessaire en 3D. Ce dernier point a été résolu au CEMEF par Hugues Digonnet, dans le cadre d'une stratégie plus générale de parallélisation du logiciel THERCAST®.

Dans la suite, nous présentons brièvement la formulation globale instationnaire proposée et quelques résultats obtenus.

5.4.1 Une nouvelle approche : la méthode globale instationnaire

On pourra se référer à l'article (Bellet & Heinrich, 2004), inséré dans le présent document à la section 11 pour une analyse détaillée des différentes stratégies de résolution en coulée continue. Pour résumer, elles sont généralement de deux types : méthodes de type tranche instationnaire et méthodes globales stationnaires. Le premier type de méthode consiste à convoyer une tranche de métal à travers la machine de coulée, en la soumettant d'une part aux conditions d'extraction thermique et d'autre part à des conditions de type déformation plane, ou déformation plane généralisée, ce qui permet de mieux tenir compte de l'éventuelle courbure de la machine. Ces méthodes de tranche souffrent d'inconvénients majeurs : certaines composantes de déformation sont ignorées (cisaillements transverses) et le gonflement entre les rouleaux ne peut pas être correctement représenté. Les méthodes globales stationnaires adoptent quant à elles une formulation quasi eulérienne. L'intégration des lois de comportement élasto-viscoplastique le long des trajectoires des points matériels est alors délicate. D'autre part la surface du maillage doit être déplacée de façon que les vecteurs vitesses soient tangents à cette surface (condition de surface libre stationnaire). Ceci n'a pu être réalisé qu'en lingotière (Huespe et al., 2000) ou sur des tronçons réduits (Dalin & Chenot, 1988) et non sur la totalité d'une machine, notamment à cause de la difficulté provenant du traitement de très nombreux contacts avec les rouleaux. En conséquence, nous nous sommes orientés vers une nouvelle formulation, que nous appelons « globale instationnaire » et que nous présentons ci-dessous.

Son principe est relativement simple. Il consiste à considérer un domaine de calcul initialement restreint au haut de la lingotière, et à le faire croître en entraînant sa face inférieure à la vitesse de coulée. La face supérieure est maintenue fixe et la discrétisation du domaine de calcul est progressivement enrichie. Cette approche est voisine de celle développée par Fjaer & Mo (1990) ou Li & Ruan (1995) pour décrire en dimension 2 l'amorçage de la coulée semi-continue d'aluminium.

Le modèle proposé est destiné en premier lieu à l'étude des phénomènes thermomécaniques en refroidissement secondaire. En conséquence, l'écoulement du liquide est ignoré, en particulier en lingotière où le débit de métal est supposé réparti sur toute la face supérieure du domaine de calcul : la convection forcée induite dans la réalité par le jet sortant de la busette immergée est ignorée dans le modèle. D'un point de vue rhéologique, le modèle hybride liquide/solide décrit à la partie 3.1 est utilisé, le liquide étant modélisé par une loi de comportement newtonienne à viscosité relativement élevée (100 Pa s). L'acier est supposé

viscoplastique à l'état pâteux et élasto-viscoplastique à l'état solide. On pourra consulter (Heinrich, 2003 ; Bellet & Heinrich, 2004) pour plus de détails.

Croissance du maillage et conditions aux limites

La surface inférieure est donc en contact bilatéral glissant avec un outil virtuel d'extraction se déplaçant à la vitesse nominale de coulée (Figure 21). Cet outil joue un rôle similaire à la tête de mannequin utilisée dans le procédé réel pour l'amorçage de la coulée. On soumet cette face à une condition thermique adiabatique. Ces deux conditions sont choisies de façon que le calcul converge le plus rapidement possible vers une solution stationnaire en une position donnée après le passage de l'outil d'extraction.. En face supérieure, la position des nœuds n'est pas actualisée en fonction de leur champ de vitesse : ils restent fixes. Pour éviter une trop forte distorsion de la première rangée d'éléments, la partie supérieure du domaine est remaillée de temps à autre, comme on peut le voir sur la Figure 21. De façon à ce que le transport des variables, nécessairement associé au remaillage, ne perturbe pas le calcul, une zone tampon est utilisée : la face supérieure du maillage est légèrement décalée au-dessus de la position réelle du ménisque de coulée. D'un point de vue thermique, aucun flux n'est extrait à travers les surfaces latérales du maillage dans cette zone tampon et, après chaque remaillage, tous les nœuds situés dans cette zone ont leur température imposée à la température nominale de coulée. D'un point de vue mécanique, la lingotière réelle est virtuellement prolongée vers le haut de manière à contenir le métal liquide de la zone tampon, au moyen de l'algorithme de contact que nous commenterons plus loin. Enfin, on impose une pression hydrostatique négative correspondant à la hauteur de cette zone, de façon à ce que la pression soit nulle au niveau du ménisque réel. Ainsi, on s'assure de non incidence de l'existence de cette zone tampon sur les résultats du calcul.

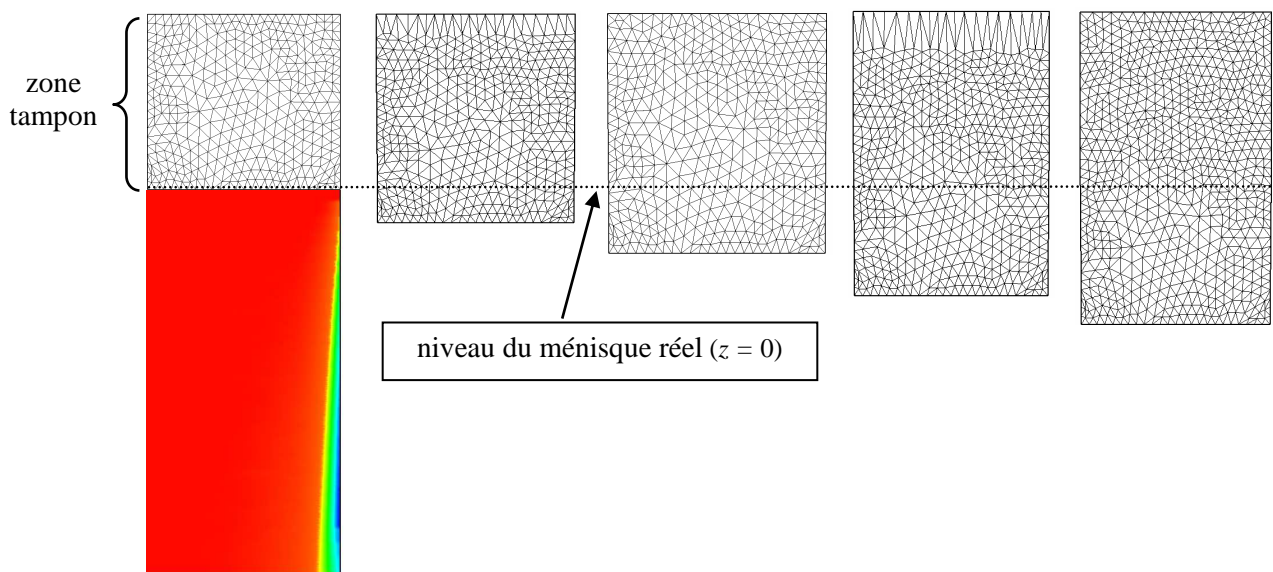


Figure 21. Approche « globale instationnaire ». Illustration, en dimension 2, de l'amorçage du processus de croissance du domaine de calcul, en utilisant une zone tampon au-dessus du niveau effectif du ménisque, de façon à éviter tout effet parasite du remaillage de la partie supérieure du domaine.

Sur les parois latérales, d'un point de vue thermique, le matériau est exposé à des conditions d'échange de type convection, dans lequel un coefficient d'échange moyen, censé traduire les divers phénomènes (conduction au contact de la lingotière et des rouleaux, convection-rayonnement, aspersion, caléfaction) est défini par zones le long de la machine. D'un point de vue mécanique, le contact unilatéral avec la lingotière et les rouleaux est traité au moyen d'une méthode de type pénalisation sur laquelle nous allons apporter quelques précisions.

Contact avec la lingotière et les rouleaux : méthode de pénalisation avec adaptation locale

La surface latérale du domaine est soumise à une condition de contact unilatéral avec la lingotière d'une part et les rouleaux de soutien d'autre part. Dans les deux cas, on utilise une méthode de type pénalisation, déjà utilisée dans THERCAST® en simulation de la fonderie classique pour traiter le contact

entre plusieurs domaines déformables (la pièce et les moules). L'application au contact avec les rouleaux nous a conduit d'une part à développer une écriture spécifique de ce contact pénalisé, et d'autre part à améliorer sa formulation pour augmenter sa précision, comme expliqué ci-après.

En contact pénalisé, on écrit classiquement que pour chaque nœud frontière n , la force normale de pénalisation est de module proportionnel à la pénétration de l'obstacle rigide :

$$\mathbf{F}^n = \chi \langle -\delta \rangle S^n \mathbf{n} \quad (43)$$

avec δ distance algébrique à l'obstacle (comptée positivement en dehors), S^n surface de contrôle affectée au nœud frontière n , \mathbf{n} vecteur normale sortante par rapport à l'obstacle et χ le coefficient de pénalisation (réel positif de valeur élevée). Les crochets signifient la prise de partie positive.

Dans l'équation des puissances virtuelles (18), la contribution de cette pénalisation à la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'exprime sous la forme de la sommation suivante sur les nœuds frontière, qui est retranchée du premier membre de (18).

$$\sum_n \mathbf{F}^n \cdot \mathbf{V}^{*n} \quad (44)$$

Dans THERCAST[®], nous avons développé une méthode d'adaptation incrémentale et locale du coefficient de pénalisation, de façon à contrôler la valeur de la pénétration numérique inhérente à la méthode. En effet, de manière générale, la distribution des efforts surfaciques de contact peut être très variable à la frontière d'une pièce. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de la fonderie, pour lequel on peut rencontrer à un même instant des régions à l'état liquide sous des pressions métallostatiques très différentes (cas des très grosses pièces de fonderie), ainsi que des régions à l'état solide avec des pressions de contact très variables (contraction autour de noyaux, gravité). C'est également vrai en coulée continue où les pressions de contact sur les différents rouleaux de soutien ainsi qu'en lingotière sont extrêmement variables. Dès lors, une approche à coefficient de pénalisation constant s'avère clairement insuffisante.

Nous avons longtemps pratiqué l'indexation de la valeur du coefficient χ sur la valeur de la pression de contact maximum ou locale, mais cela s'est avéré insuffisamment robuste. Plus récemment, nous avons développé une technique visant à assurer que les termes de raideur provenant du contact pénalisé soient prédominants par rapport aux autres contributions selon un ratio fixé a priori (par exemple 10^3 ou 10^4). Bien que plus satisfaisante, cette technique a également montré ses limites. En particulier, nous avons constaté que les pénétrations étaient très variables pour des pressions de contact de même intensité : de 10^{-2} fois la taille de maille – valeur semblant a priori correcte – à 10^{-9} fois cette même taille ! Cela montre qu'avec cette méthode certaines zones sont excessivement pénalisées. Autrement dit, il doit être possible de diminuer les coefficients de pénalisation du contact dans certaines régions, et donc d'améliorer le conditionnement des systèmes à résoudre, tout en contrôlant l'évolution de la pénétration.

C'est ce qui a inspiré la nouvelle méthode d'adaptation locale du coefficient par contrôle de la pénétration. En notant pen_{obj} la pénétration « objectif », c'est-à-dire la valeur de consigne autour de laquelle on souhaite contrôler $-\delta$, on détermine la nouvelle valeur de χ^n au nœud n en supposant que la pression de contact va approximativement rester la même sur le nouvel incrément. On a donc :

$$\chi_{new}^n = \chi^n \frac{(-\delta^n)}{pen_{obj}} \quad (45)$$

Si la pénétration actuelle $-\delta^n$ se situe au voisinage de pen_{obj} , la correction de χ^n est mineure. A l'inverse, le ratio χ_{new}^n / χ^n est arbitrairement limité à l'intervalle $[0,1 ; 10]$ pour éviter des corrections trop brutales. Cette stratégie simple donne d'excellents résultats en fonderie classique. Après une phase d'ajustement sur les tout premiers incréments de temps, au cours desquels on voit la valeur des pénétrations s'homogénéiser autour de la valeur de consigne sur tout l'interface pièce-moule, les corrections sont ensuite très légères et permettent de maintenir parfaitement une valeur uniforme des pénétrations, égale à la valeur visée. C'est ce qui se passe également pour le contact avec la lingotière de coulée continue.

Pour l'application au contact avec les rouleaux, la relation (43) peut être adaptée pour tenir compte de la forme cylindrique de chaque rouleau. On a pour un nœud n de la surface du produit :

$$\mathbf{F}^n = \chi^n \left(R - \|\mathbf{r}\| \right) S^n \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{Pn} \quad (46)$$

où P est le projeté orthogonal du nœud n sur l'axe du rouleau le plus proche et R le rayon de ce rouleau. On bénéficie ainsi de la forme analytique simple du cylindre pour développer une expression analytique du contact pénalisé, qui plus est à caractère *implicite*. La force est en effet fonction, par l'intermédiaire de \mathbf{r} , de l'itéré courant du champ de vitesse, inconnue du problème.

Cependant, dans le cas des rouleaux de coulée continue, cette méthode ne donne pas de bons résultats. En effet, le contact de chaque nœud frontière est de nature intermittente : contact relativement bref avec un rouleau, puis état de surface libre entre deux rouleaux avant de se retrouver de nouveau en contact avec le rouleau suivant. Au passage sous chaque rouleau, le nombre d'incrémentes est donc insuffisant pour adapter correctement la valeur du coefficient de pénalisation, à l'aide de la loi (45). Il en résulte des valeurs de pénétration numérique très diverses pour chacun des rouleaux. Les valeurs des déflexions de la surface du produit entre les rouleaux étant assez faibles (de l'ordre de quelques dixièmes de mm), ce traitement est trop approximatif.

Nous avons alors proposé d'affecter le coefficient de pénalisation non plus à chaque nœud frontière, mais à chaque rouleau. Sa valeur est modifiée incrémentalement de façon à contrôler la pénétration numérique du produit dans le rouleau autour d'une valeur prédéfinie (typiquement de l'ordre de 0.1 mm). Cette stratégie s'est avérée très efficace. En effet, dans le cadre de notre stratégie globale instationnaire, un rouleau donné entre en contact avec le produit au passage de l'outil virtuel d'extraction puis reste en contact avec le produit. L'adaptation du coefficient s'effectue alors sans problème et la pénétration est parfaitement contrôlée et uniforme sur toute la machine, comme nous le montrerons plus loin. Cette pénétration numérique étant bien contrôlée, il est même possible de changer le rayon des rouleaux d'une même valeur : on a alors un contrôle *exact* du contact bilatéral entre le produit et les rouleaux, aussi précis que ce que pourrait offrir une méthode de multiplicateurs de Lagrange, mais sans le surcoût de calcul ni la complexité apportée par une inconnue supplémentaire en frontière.

5.4.2 Résultats

Validation de l'approche globale instationnaire

La validation de l'implantation de la résolution thermomécanique dans le contexte spécifique de la coulée continue avec la stratégie de résolution globale instationnaire a été effectuée de deux façons. Du point de vue thermique, par comparaison avec des résultats issus de méthodes de type tranche. En effet, en coulée d'aciers, vus les très faibles gradients thermiques dans la direction de coulée, les deux méthodes doivent donner des résultats très proches, ce qui a été vérifié dans les thèses de A. Heinrich (Heinrich, 2003) et F. Costes (Costes, 2004). Du point de vue mécanique, dans ces mêmes thèses, les résultats ont été comparés à ceux obtenus par une analyse stationnaire appliquée en lingotière (Huespe et al., 2000 ; Fachinotti, 2001). La Figure 22 et la Figure 23 illustrent ces deux types de validation.

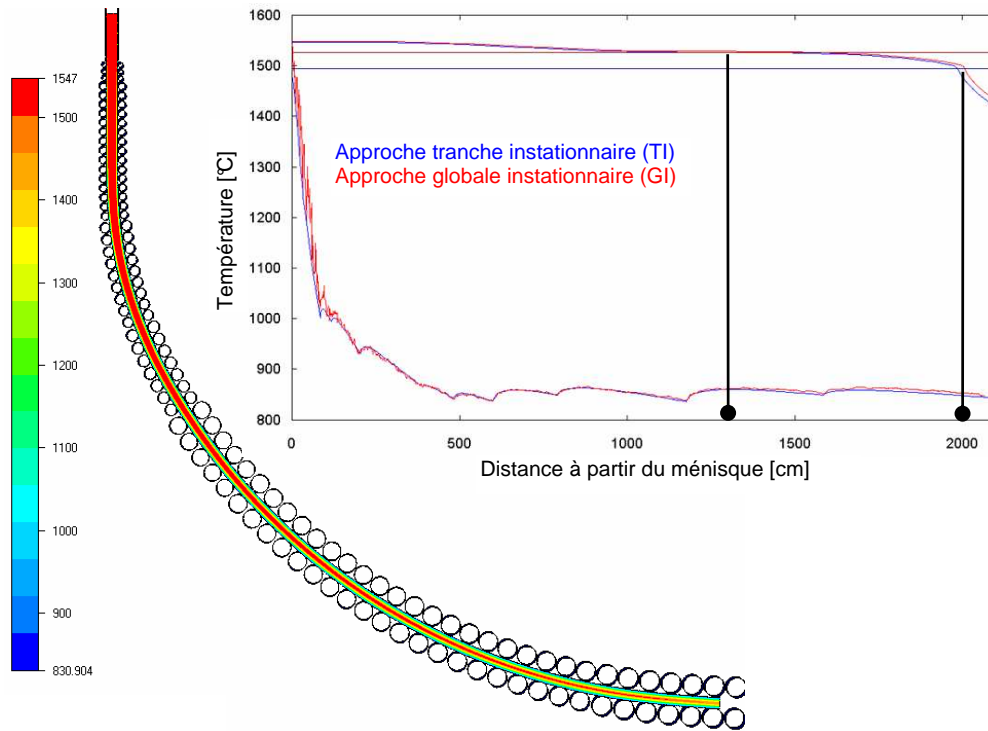


Figure 22. Validation de l'approche « globale instationnaire » en thermique, sur la coulée de brames de Fos-sur-mer (groupe Arcelor). Le calcul a été effectué avec THERCAST® sur une section longitudinale, dans le plan médian de la machine (maillage volumique 3D, mais de faible épaisseur dans la direction de la largeur de la brame). On constate que les approches « globale instationnaire » (GI) et « tranche instationnaire » (TI) donnent des résultats quasi identiques. Au vu de l'évolution de la température à cœur, le puits liquide prend fin à 13 m sous le ménisque (abscisse curviligne), tandis que la solidification est complète à environ 20 m.

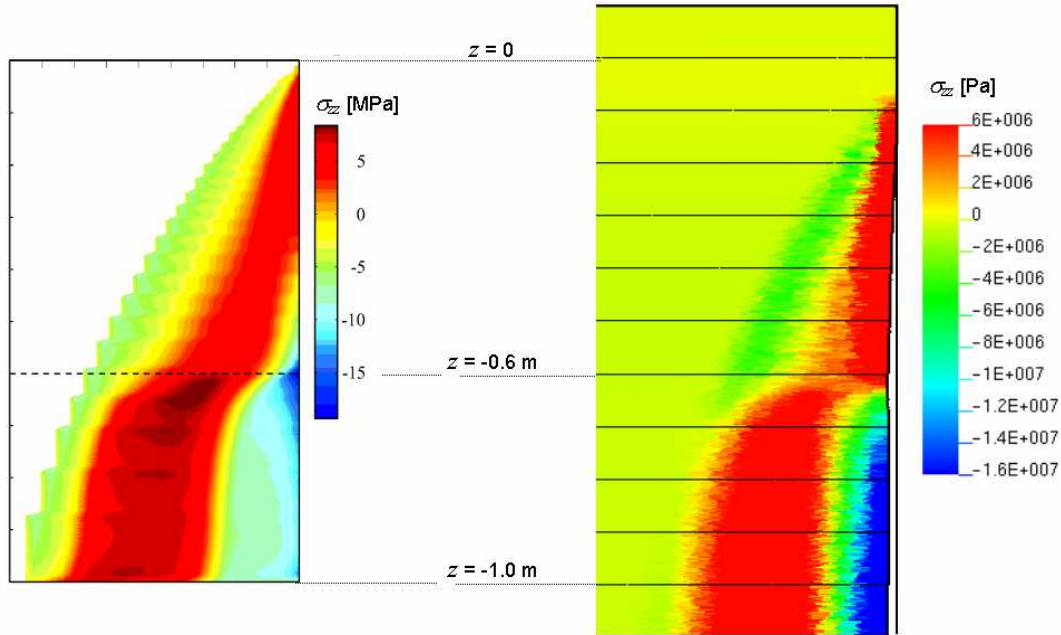


Figure 23. Validation de l'approche « globale instationnaire » en mécanique sur une coulée de ronds (section cylindrique, rayon 106 mm) de la société argentine Siderca. La figure montre la distribution des contraintes axiales dans une bande de 18 mm en surface du produit. La lingotière se termine à 0,6 m sous le ménisque. A gauche le résultat du calcul de Fachinotti (Huespe et al., 2000 ; Fachinotti, 2001), mené en formulation eulérienne stationnaire 2D axisymétrique, sur une longueur de 1 m. A droite le résultat obtenu avec R2SOL, en approche globale instationnaire 2D axisymétrique, après 1,10 m de coulée. Les résultats sont proches. Différentes raisons peuvent être la source des légères différences constatées : maillages différents (plus grossier pour R2SOL), calcul sur la seule partie solide et sans prise en compte de la création

d'une lame d'air entre le produit et la lingotière dans le cas de Fachinotti (la lame d'air est visible sur le calcul R2SOL).

Etat de contraintes en refroidissement secondaire

On considère une simulation bidimensionnelle avec le logiciel R2SOL, en condition de déformation plane, de la coulée de brames de Fos-sur-mer (Arcelor). Les données relatives à l'acier coulé (bas carbone XC6) peuvent être trouvées dans (Heinrich, 2003). La région montrée à la Figure 24 se situe au milieu du refroidissement secondaire. On distingue clairement l'alternance de zones en état de compression (pression positive) et de dépression (pression négative) dans la peau solide du produit. Plus précisément, on constate une double alternance. Tout d'abord, en surface, l'état est compressif sous chaque rouleau (la pression y est maximale, environ 35 MPa), tandis qu'on trouve un état dépressif entre les rouleaux (pression minimum, de l'ordre de -9 MPa). Il est également intéressant de constater que l'alternance est inversée plus en profondeur, au voisinage du front de solidification : la coque solide est alors en état dépressif au droit des rouleaux (pression négative de l'ordre de -2 MPa) tandis qu'elle est en état compressif entre les rouleaux (pression positive de l'ordre de 2 à 3 MPa). Ces résultats confirment parfaitement ce qu'avait proposé certains auteurs (Wünnenberg, 1978 ; Miyazawa & Schwerdtfeger, 1981 ; Dalin & Chenot, 1988 ; Kajitani et al., 2001) à l'aide d'analyses statiques ou effectuées sur des domaines très restreints, de l'ordre de deux intervalles inter-rouleaux. Sous l'effet de la pression métallostatique, on constate un gonflement de la peau du produit entre les rouleaux, analogue au fléchissement d'une poutre chargée et reposant sur des appuis ponctuels. Le matériau est soumis à une succession de compressions et de dépressions engendrées par cette mécanique de poutre.

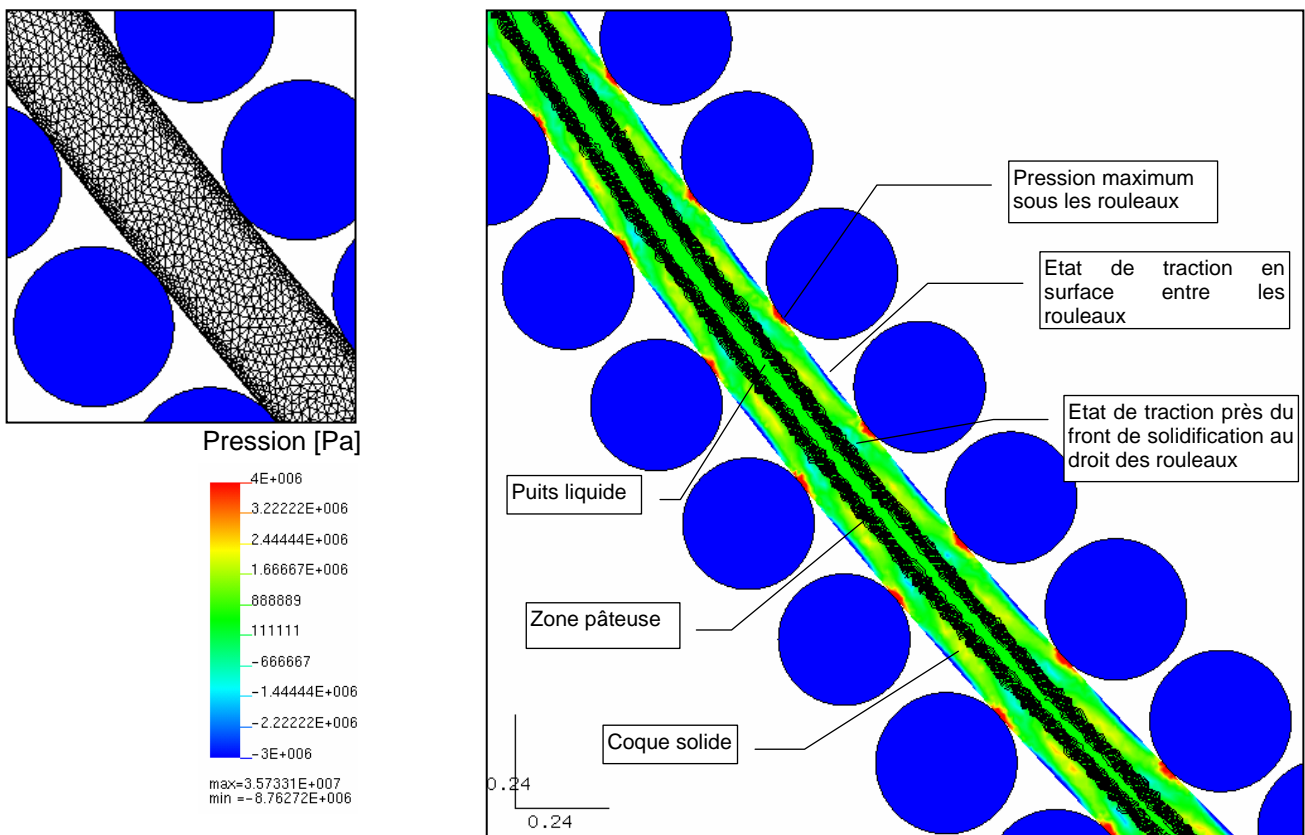


Figure 24. Simulation thermomécanique globale du refroidissement secondaire (logiciel R2SOL, machine de Fos-sur-mer). A environ 11 m sous le ménisque, la vue en haut à gauche montre le maillage utilisé, raffiné près de la surface. La vue de droite révèle les zones en état dépressif et compressif : on distingue clairement l'existence de zones à pression négative au voisinage du front de solidification. La zone pâteuse est matérialisée à l'aide de la superposition de 20 lignes d'iso fraction solide (intervalle $\Delta g_l = 0,05$).

La Figure 25 illustre les pressions calculées à l'intrados et à l'extrados de la machine de Dunkerque (groupe Arcelor) lors de la coulée d'un acier CC20 (AISI 1021). Le calcul a été réalisé avec THERCAST®

sur un maillage volumique de largeur réduite situé dans le plan médian de la machine (taille de maille 8 mm près de la surface et 20 mm au centre). Sur cette machine courbe (pas de partie droite en sortie de lingotière), l'évolution de la pression en peau est très similaire entre intrados et extrados jusqu'à environ 15 mètres : on retrouve l'alternance compression-dépression déjà signalée. A partir de 15 mètres commence le décintrage du produit. Les évolutions se différencient alors entre intrados et extrados. On distingue très clairement l'ajout d'une composante de traction à l'intrados (la pression diminue) et d'une composante de compression à l'extrados (la pression augmente). De ce fait, on voit par exemple que la peau solide est sollicitée en permanence en compression côté extrados tandis qu'elle est soumise à l'alternance tension - compression côté intrados. On peut donc penser que le risque d'apparition de défauts de surface au décintrage est plus critique du côté intrados. Toutefois, cette observation dépend de la valeur réelle des pics de pression, dont on peut penser qu'elle est influencée sensiblement par la finesse de maillage au droit des rouleaux.

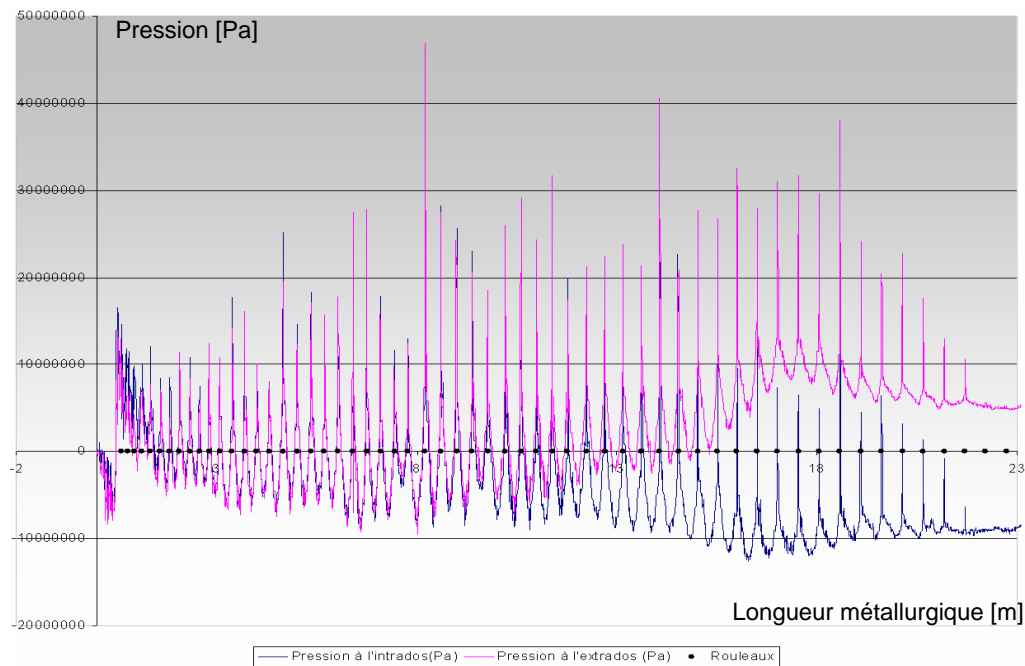


Figure 25. Pression calculée en surface du produit, côté extrados et intrados (machine de Dunkerque, acier CC20, AISI 1021, logiciel THERCAST®). Les points noirs sur l'axe des abscisses indiquent l'emplacement des rouleaux de soutien.

Gonflement entre les rouleaux

La Figure 26 illustre les déflexions calculées à l'extrados de la machine de Dunkerque. On constate tout d'abord que la condition de contact avec les rouleaux est très bien traitée par notre algorithme de pénalisation adaptée : sous chaque rouleau la pénétration numérique est très faible. D'autre part, en étudiant les déflexions obtenues pour trois positions du pseudo-mannequin (15 m, 20 m et 23 m), on constate que le gonflement à une longueur métallurgique donnée se stabilise après que le pseudo-mannequin a franchi 2 à 3 mètres. Les pics proches du pseudo-mannequin (pour les trois positions) sont dûs à l'initialisation des facteurs de pénalisation du contact avec les rouleaux. La stabilisation de ces facteurs est progressive et non immédiate, ce qui explique en partie la distance de stabilisation de 2 à 3 mètres. Alors que la température se stabilise immédiatement (du fait de la condition d'adiabaticité imposée sur l'outil virtuel d'extraction), le régime permanent n'est donc pas obtenu immédiatement pour la mécanique, mais son établissement est tout de même rapide. On peut également observer des gonflements plus élevés à certaines positions (par exemple à 8 m). Ces pics s'expliquent par un écartement plus grand entre certains rouleaux. L'amplitude moyenne est de l'ordre du demi millimètre avec des maxima allant jusqu'à 0,8 mm.

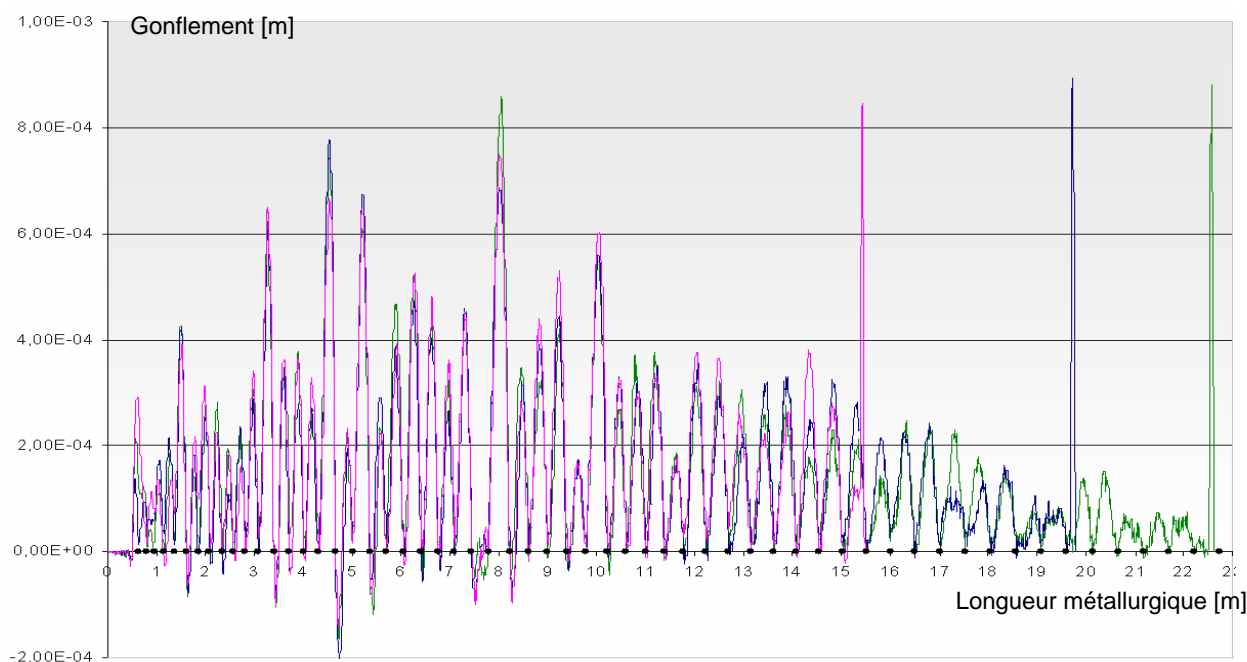


Figure 26. Déflexion de la surface de brame à l'extrados le long de la machine de Dunkerque (acier CC20, AISI 1021). Les profils sont indiqués pour trois positions du pseudo-mannequin : 15, 20 23 mètres. Le pic de gonflement au voisinage du mannequin est provoqué par un coefficient de pénalisation initialisé volontairement à une valeur modérée lorsque chaque rouleau est atteint par le produit (contact initial numériquement « mou »).

Ces développements ont déjà fait l'objet d'une exploitation industrielle par Arcelor (Triolet et al., 2004). Pour la machine CC2 de Fos-sur-mer, ont été simulées deux stratégies de refroidissement et trois vitesses de coulée. Les résultats obtenus mettent en évidence la forte dépendance des gonflements avec l'intensité de l'aspersion d'eau au cours du refroidissement secondaire d'une part, et la vitesse de coulée d'autre part (Figure 27). Par ailleurs, il est intéressant de constater sur la Figure 28, que le profil de déflexion est décentré vers l'aval, ce que certains auteurs avaient déjà remarqué et expliqué en invoquant la composante visqueuse du comportement des aciers à haute température : la réponse de la « poutre » en appui inclut une contribution de type fluage qui, conjuguée au mouvement de la brame, provoque effectivement ce décentrage. Il a été montré que les irrégularités du profil calculé proviennent de la gestion du contact pénalisé : lorsque les nœuds perdent le contact avec un rouleau, ils le font dans des conditions qui varient en fonction de la position relative du nœud par rapport à l'axe du rouleau. Ces irrégularités du profil croissent avec la taille du maillage et le pas de temps.

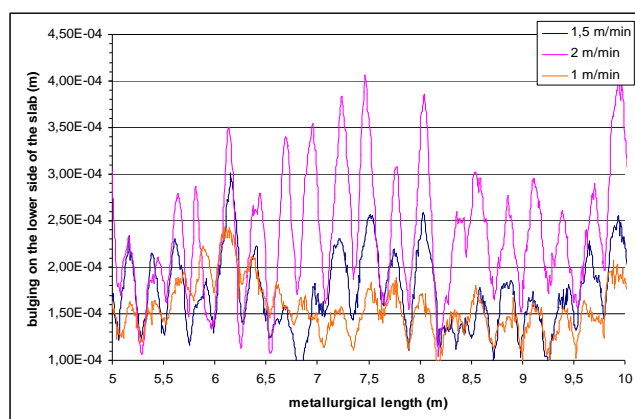


Figure 27. Exploitation industrielle du logiciel sur la machine de coulée CC2 de Fos-sur-mer (Arcelor). Les gonflements calculés augmentent avec la vitesse de coulée (d'après (Triolet et al., 2004)).

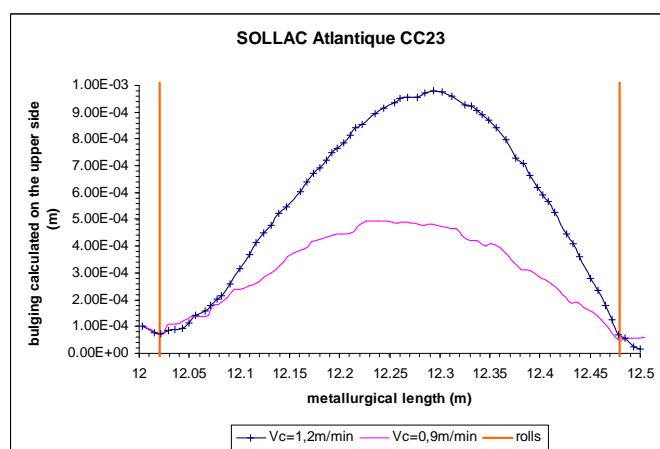


Figure 28. Décentrement du profil de gonflement vers l'aval et influence de la vitesse de coulée. Calcul effectué sur la machine de Dunkerque (Arcelor), d'après (Triolet et al., 2005).

En conclusion, le développement de notre formulation globale instationnaire nous semble un élément très important pour la compréhension de la thermomécanique du refroidissement secondaire en coulée continue. A l'heure actuelle, nous disposons d'une version bidimensionnelle dans R2SOL ainsi que d'une version tridimensionnelle dans THERCAST[®]. Celle-ci a été utilisée dans un premier temps dans une approche pseudo-2D. Les temps de calcul dans le cas d'une coulée de brames sont de l'ordre d'une trentaine d'heures en 2D et de 7 jours en 3D sur PC (3GHz, 1 Go Ram). Réaliser des calculs sur une géométrie complète de machine à brames va donc nécessiter l'utilisation de la version parallèle du code. Cependant, l'approche tridimensionnelle a déjà été utilisée par Transvalor et Arcelor pour étudier la déformation de la lingotière de coulée continue (Triolet, 2003) ou la thermomécanique du produit au voisinage de la petite face (Marini, 2004 ; Figure 29).

Dans l'avenir, pour enrichir la simulation afin de prédire les défauts internes tels que criques et macroségrégations, notre intérêt va se porter en particulier sur une meilleure description de la zone pâteuse. En effet, dans ce procédé, on constate que la peau solide renferme du métal à l'état pâteux sur une grande distance (cf. Figure 22). La thermomécanique de cette zone pâteuse doit donc être comprise et modélisée. C'est ce qui motive le chapitre suivant.

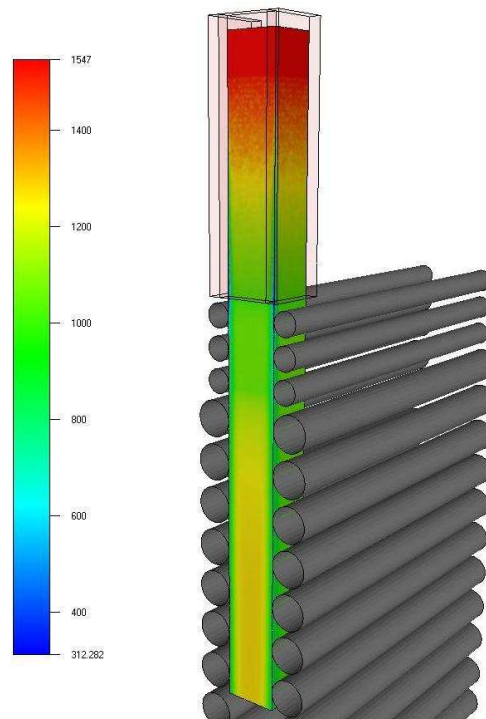


Figure 29. Etude de la thermomécanique de l'extrémité de la brame en début de refroidissement secondaire. Seule l'extrémité de la brame est modélisée, une condition de symétrie étant imposée à une distance donnée de l'extrémité. On voit ici le champ de température sur la petite face [°C], ainsi que sur l'extrémité de la grande face (machine de Fos-sur-mer).

6 MODELISATION THERMOMECHANIQUE DE LA ZONE PATEUSE EN SOLIDIFICATION

6.1 APPROCHE DE TYPE MILIEU CONTINU MONOPHASE

Dans les sections précédentes, 3 à 5, nous avons considéré que le matériau avait un comportement de fluide non newtonien dans l'intervalle de solidification. Ceci correspond aux équations (1), page 62. Dans cette approche on considère que la loi de comportement du mélange de particules solides et de liquide est celle d'un milieu continu homogénéisé équivalent. On ne distingue donc pas la phase solide de la phase liquide. Il s'agit de l'approche la plus fréquemment rencontrée dans la littérature consacrée au comportement rhéologique des alliages à l'état semi-solide. Elle dérive de la théorie des suspensions et s'appuie sur un très grand nombre de caractérisations rhéologiques effectuées dans des conditions variées, mais où la rhéologie de type Couette (cisaillement entre cylindres concentriques) joue un rôle très important.

Nous essayons de synthétiser ci-dessous les grands types de modèles proposés à ce jour. On pourra se référer par ailleurs aux revues bibliographiques de Serge Moto Mpong dans sa thèse (Moto Mpong, 2002) et de (Martin & Orgéas, 2002).

Aux faibles fractions de solide, en début de solidification, typiquement pour $0 < g_s < 0,2$, le métal est généralement considéré comme newtonien. A la suite d'Einstein (1906), qui a été un des premiers à avoir étudié l'hydrodynamique des particules dans une suspension, nombre d'auteurs ont proposé des modèles faisant dépendre la viscosité de la fraction volumique de solide, mais aussi de paramètres microstructuraux tels que le diamètre moyen des particules solides ou leur surface spécifique.

Aux fractions solides plus élevées, typiquement pour $0,2 < g_s < 0,6$, les modèles précédents sont complétés par une dépendance de la viscosité en fonction du taux de cisaillement (ou plus généralement du taux de déformation généralisé), qui provient de l'interaction des particules de solide entre elles et de leur déformation visqueuse. Le caractère rhéo-fluidifiant des alliages à l'état pâteux est ainsi introduit. Il est caractérisé par un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation, m , compris entre 0,2 (valeur typique à l'état solide à haute température) et 1 (valeur limite correspondant à l'écoulement newtonien).

Il convient de remarquer cependant que ces modèles non newtoniens sont souvent identifiés pour des états de déformation tels que la microstructure du mélange semi-solide a atteint un état d'équilibre (en cisaillement de Couette stationnaire). Ainsi, pour mieux modéliser les régimes transitoires, caractéristiques des procédés industriels rapides tels que l'injection à l'état semi-solide ou "thixoformage", certains auteurs ont proposé des modèles utilisant une variable interne décrivant le degré d'agglomération des particules au sein du mélange ($s=0$ pour des particules non agglomérées et $s=1$ pour des particules toutes agglomérées). Les modèles non newtoniens précédents sont alors complétés par une dépendance de la viscosité en fonction de s et une loi d'évolution de cette variable interne. Un des modèles les plus élaborés est celui de Kumar et al. (1994). Cette démarche est séduisante, mais on peut objecter que la signification du paramètre s reste relativement floue. Il est difficile, comme le font remarquer Martin & Orgéas (2002), de rattacher sa valeur à un paramètre de microstructure mesurable. En conséquence, les lois semi-empiriques d'évolution de s font intervenir un grand nombre de paramètres qui doivent être identifiés par un programme expérimental très lourd. De ce fait, aucun de ces modèles n'a pour le moment été identifié pour des alliages métalliques utilisés industriellement dans la plage de températures et de vitesses des procédés de mise en forme. Ils ne sont donc pas utilisés dans les codes de simulation numérique.

6.1.1 Identification d'une loi de comportement non newtonienne pour modélisation du thixoformage

Pour illustrer ce dernier propos, la Figure 30 résume la méthode d'identification des paramètres K et m d'une loi viscoplastique de type Norton-Hoff utilisée pour modéliser l'écoulement d'un alliage d'aluminium

A356 de structure globulaire dans un procédé d'injection à l'état semi-solide. La méthode s'appuie sur la réalisation d'expériences d'injection de disques dans diverses conditions opératoires (géométrie, température, vitesse) et sur leur simulation numérique avec le logiciel FORGE2®. Les valeurs des coefficients K et m sont alors ajustées pour minimiser l'écart entre les mesures des efforts enregistrés au cours des expériences et les mêmes efforts simulés. Pour plus de détails on pourra se référer à (Bellet & Moto Mpong, 2001) et (Moto Mpong, 2002).

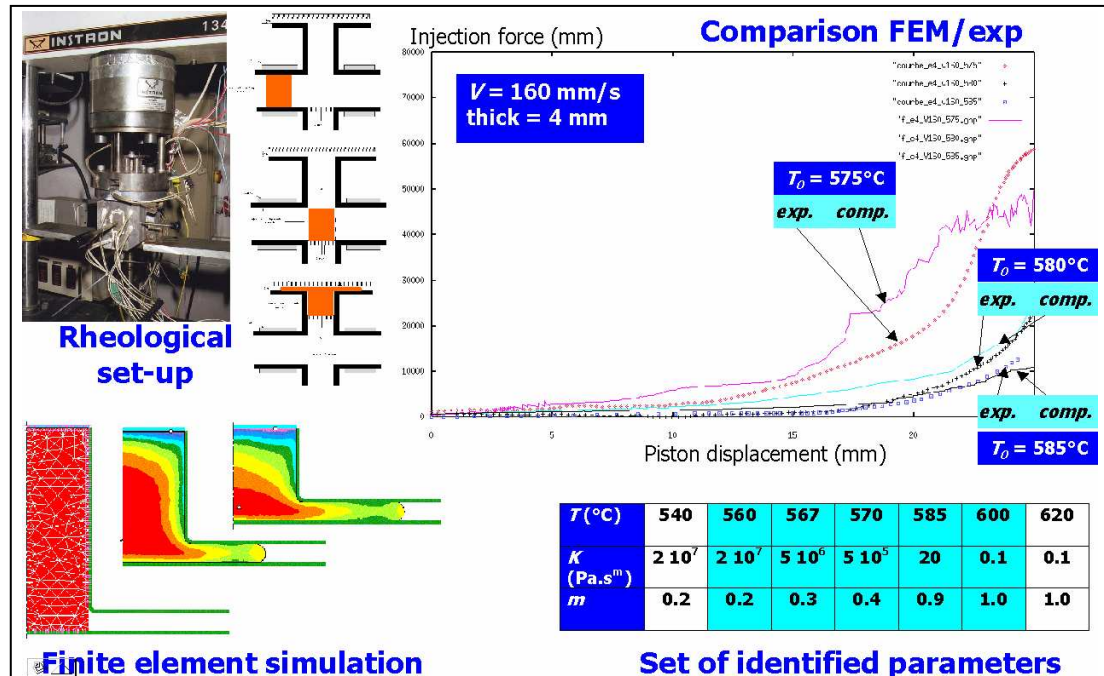


Figure 30. Identification des coefficients d'une loi de Norton-Hoff pour modéliser l'écoulement d'un alliage d'aluminium A356 de structure globulaire dans un procédé d'injection à l'état semi-solide.

La loi ainsi identifiée a été utilisée pour simuler l'injection de pièces complexes, telles que celle montrée à la Figure 31, pour laquelle une comparaison a été effectuée par rapport à des essais d'injection interrompus.

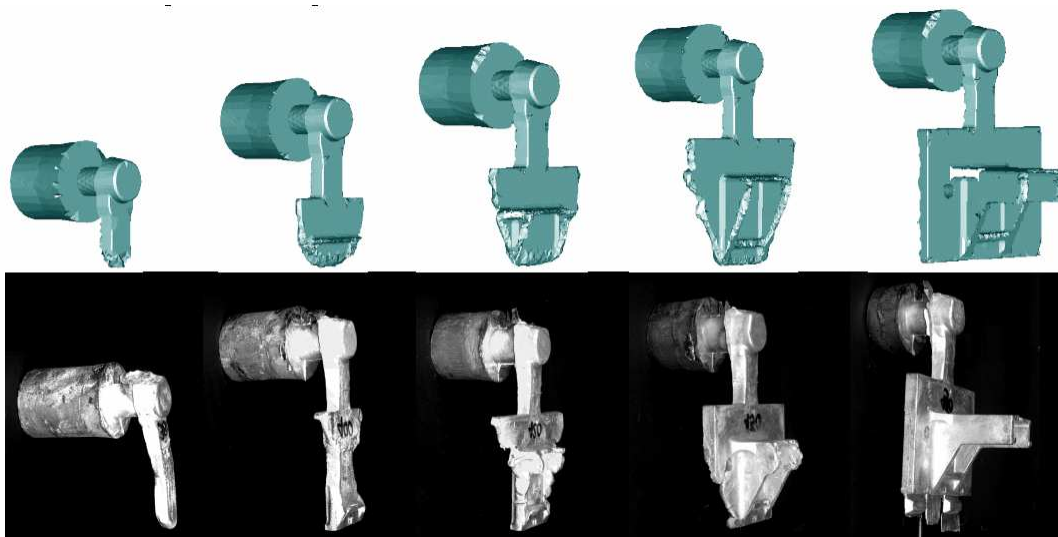


Figure 31. Simulation de l'injection à l'état semi-solide d'une pièce test avec le logiciel REM3D®. Comparaison entre le calcul (en haut) et une série d'injections interrompues pratiquées par la société Stampal (en bas).

Pour conclure cette section sur les modèles monophasiques, signalons qu'aux plus fortes fractions de solide, au-delà de ce que l'on appelle la fraction solide de cohérence, qui caractérise l'apparition d'un

squelette solide connecté (typiquement autour de $g_s=0,65$), les modèles précédents dérivant de la théorie des suspensions ne s'appliquent plus. En effet, le comportement du mélange ne peut être réduit à celui d'un milieu homogénéisé. Les écoulements différentiels entre phase liquide et phase solide sont alors déterminants et demandent une approche effectivement diphasique. C'est ce que nous allons détailler dans la section suivante.

6.2 APPROCHE DE TYPE MILIEU CONTINU BIPHASIQUE AVEC MILIEU SOLIDE DEFORMABLE

Au cours de sa solidification, un alliage métallique passe de l'état liquide à l'état solide en passant par l'état pâteux ou semi-solide, où coexistent phase liquide et phase solide. A un certain stade de la solidification, la phase solide forme un squelette cohérent susceptible de se déformer, ce qui influe sur l'écoulement de la phase liquide et donc sur la redistribution des éléments d'alliage en solution (macroségrégation). Pour traduire ce phénomène, l'alliage à l'état pâteux doit être décrit comme un mélange biphasique, constitué d'une phase liquide et d'une phase solide en interaction, chaque phase possédant sa cinématique et sa rhéologie propre. La complexité de la microstructure de l'alliage en cours de solidification rend cependant illusoire une résolution des équations de bilan au niveau microscopique pour la simulation des procédés industriels. Pour décrire l'évolution thermomécanique d'une pièce complexe en cours de solidification, ces équations doivent être remplacées par des équations de bilan « macroscopiques », établies sur un volume élémentaire représentatif (v.e.r.), dont la taille doit être suffisamment grande par rapport aux dimensions caractéristiques de la microstructure et suffisamment petite par rapport à la taille de la pièce étudiée.

Dans la littérature, les modèles thermomécaniques prenant en compte le mouvement des deux phases, liquide et solide, ainsi que leur interaction, ont été proposés essentiellement dans le but de modéliser le transport et la sédimentation des grains de phase solide, afin de mieux comprendre la formation d'une zone équiaxe et les phénomènes de macroségrégation qui lui sont associés. On peut citer les approches de Beckermann et al. (Ni & Beckermann, 1991 ; Wang & Beckermann, 1996) qui ont introduit le formalisme de prise de moyenne, puis l'ont appliqué dans le cadre de la méthode des volumes finis. Ces recherches ont inspiré Combeau et al. (Rabbia, 2004) qui ont développé une approche similaire, toujours en volumes finis bidimensionnels, ainsi que A. Ludwig & Wu (2002), utilisant la même approche avec le logiciel Fluent pour des calculs bidimensionnels de sédimentation. Dans tous ces travaux, la phase solide se déplace mais ne se déforme pas. Ces calculs s'appliquent donc au-dessus de la température de cohérence et ne peuvent modéliser la déformation que peut subir la zone pâteuse en dessous de cette température ainsi que les conséquences sur l'écoulement de la phase liquide et le transport associé des éléments d'alliage.

Par ailleurs, certains auteurs ont développé des modélisations effectivement biphasiques prenant en compte la déformation du milieu solide. Cependant, la plupart de ces travaux sont limités au contexte d'écoulements isothermes et ne s'appliquent donc pas directement à l'étude des procédés de solidification, puisqu'ils n'incluent pas l'échange de masse entre la phase liquide et la phase solide, ainsi que le couplage avec le transport des éléments d'alliage. On peut citer (Nguyen et al., 1994 ; Lalli, 1985 ; Toyoshima & Takahashi, 1991 ; Bay et al., 1998). Seuls M'Hamdi et al. (2002) ont proposé, pour l'étude de la coulée continue de l'aluminium, un modèle dans lequel le transfert de masse est pris en compte, mais pas la macroségrégation, le modèle supposant la connaissance a priori du chemin de solidification de l'alliage. De plus cette approche est strictement limitée à de très faibles vitesses différentielles d'écoulement entre les deux phases, les effets d'advection différentielle dans l'équation de conservation de l'énergie n'étant pas pris en compte. Récemment, cette même équipe a complété son modèle avec la résolution du bilan en soluté. Toutefois, le couplage thermique-solidification-macroségrégation n'est toujours pas pris en compte, ce qui est acceptable seulement pour de faibles ségrégations (Nicolli et al., 2005).

Notre approche se situe donc en continuité avec ces deux familles de travaux, afin de proposer une formulation suffisamment générale et d'envisager son application à la modélisation de la thermomécanique de la zone pâteuse en coulée continue. Dans cette section, nous rappelons comment les équations

macroscopiques peuvent être obtenues par la méthode de prise de moyenne spatiale, appliquée aux équations de conservation à l'échelle microscopique. Nous discutons ensuite les lois constitutives adoptées ainsi que la modélisation des termes d'échange entre phases. Les équations du problème biphasique complet sont alors dégagées puis mises sous forme faible. Des exemples de mise en œuvre d'une méthode de résolution bidimensionnelle par éléments finis sont alors exposés.

6.2.1 Quelques rappels sur la méthode de prise de moyenne spatiale

La méthode de prise de moyenne spatiale consiste à supposer que le comportement du milieu biphasé à l'échelle macroscopique est régi par la moyenne des équations de bilan locales, prise sur un v.e.r. V_0 (Figure 32). Nous reprenons ici le formalisme mis en place dans les références de base sur ce sujet (Gray & O'Neill, 1976 ; Hassanizadeh & Gray, 1979 ; Ganesan & Poirier, 1990 ; Ni & Beckermann, 1991 ; Rappaz et al., 1998). Nous nous plaçons ici dans le cas d'un mélange saturé, c'est-à-dire sans aucune porosité, constitué de deux phases : une phase solide (indice s) et une phase liquide (indice l). Dans le v.e.r. V_0 , chaque phase k occupe le volume V_k , et la moyenne d'une quantité scalaire ψ dans la phase k peut être définie par :

$$\langle \psi \rangle^k = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \psi(\mathbf{x}) dV \quad (47)$$

En faisant intervenir la fonction de présence de la phase k , notée χ_k , qui vaut 1 dans V_k et 0 partout ailleurs dans V_0 , on a :

$$\langle \psi \rangle^k = \frac{1}{V_k} \int_{V_0} \psi(\mathbf{x}) \chi_k(\mathbf{x}) dV \quad (48)$$

Ceci permet de définir une seconde valeur moyenne, rapportée cette fois au v.e.r. V_0 :

$$\langle \psi^k \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_k} \psi(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \psi(\mathbf{x}) \chi_k(\mathbf{x}) dV = \frac{V_k}{V_0} \langle \psi \rangle^k \quad (49)$$

Il est à noter que le rapport trouvé entre les deux moyennes, V_k/V_0 , n'est autre que la fraction volumique de phase k dans le v.e.r., notée g_k . En effet,

$$g_k = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \chi_k(\mathbf{x}) dV = \frac{V_k}{V_0} \quad (50)$$

Nous introduisons donc les définitions et notations suivantes :

- Moyenne intrinsèque sur la phase k : $\psi_k = \langle \psi \rangle^k = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \psi \chi_k dV$ (51)

- Moyenne sur le v.e.r. : $\langle \psi^k \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \psi \chi_k dV = \frac{V_k}{V_0} \langle \psi \rangle^k = g_k \psi_k$

Au passage, on remarque que l'hypothèse de saturation du milieu semi-solide se traduit par :

$$g_s + g_l = 1 \quad (52)$$

A partir des définitions précédentes, on peut démontrer les théorèmes qui permettent de prendre la moyenne des dérivées temporelles et spatiales des variables apparaissant dans les différentes équations de conservation. On pourra trouver la démonstration détaillée dans Rappaz et al. (1998) par exemple :

$$\left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^k \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi^k \rangle - \frac{1}{V_0} \int_{A_k} \psi \mathbf{w}^k \cdot \mathbf{n}^k dS \quad (53)$$

$$\langle (\nabla \psi)^k \rangle = \nabla \langle \psi^k \rangle + \frac{1}{V_0} \int_{A_k} \psi \mathbf{n}^k dS \quad (54)$$

où la surface A_k désigne la frontière du domaine V_k occupé par la phase k , \mathbf{w}^k la vitesse locale de cette interface, et \mathbf{n}^k le vecteur normale extérieure à V_k (Figure 32).

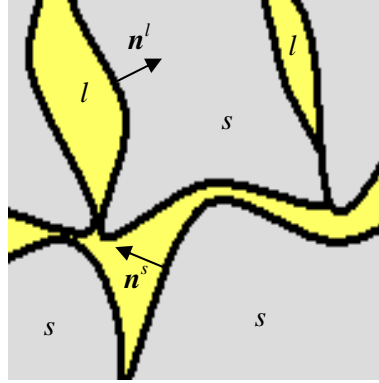


Figure 32. Volume élémentaire représentatif V_0 .

De même, on montre que :

$$\nabla g_k = -\frac{1}{V_0} \int_{A_k} \mathbf{n}^k dS \quad (55)$$

Par ailleurs, la fluctuation de ψ dans la phase k par rapport à sa valeur moyenne intrinsèque est définie par :

$$\hat{\psi}_k(\mathbf{x}) = (\psi(\mathbf{x}) - \psi_k) \chi_k(\mathbf{x}) \quad (56)$$

Il découle directement des définitions précédentes que les valeurs moyennes, à la fois intrinsèques et sur le v.e.r., associées à cette fluctuation sont nulles :

$$\langle \hat{\psi}_k \rangle^k = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} (\psi - \psi_k) \chi_k dV = 0 \quad \text{et donc} \quad \langle \hat{\psi}_k \rangle^k = 0 \quad (57)$$

Lorsqu'on prend la moyenne intrinsèque du produit de deux quantités scalaires, ψ et ϕ , il est facile de démontrer qu'on obtient le produit des valeurs moyennes ainsi qu'un terme correcteur donné par la moyenne du produit des fluctuations :

$$\langle \psi \phi \rangle^k = \langle \psi \rangle^k \langle \phi \rangle^k + \langle \hat{\psi}_k \hat{\phi}_k \rangle^k \quad (58)$$

Pour la moyenne sur le v.e.r., on a donc :

$$\langle (\psi \phi)^k \rangle = g_k \langle \psi \rangle^k \langle \phi \rangle^k + g_k \langle \hat{\psi}_k \hat{\phi}_k \rangle^k = \frac{1}{g_k} \langle \psi^k \rangle \langle \phi^k \rangle + \langle \hat{\psi}_k \hat{\phi}_k \rangle^k \quad (59)$$

Le raisonnement s'étend sans difficulté au produit d'un vecteur par un scalaire et on a de manière analogue :

$$\langle \psi \mathbf{v} \rangle^k = \langle \psi \rangle^k \langle \mathbf{v} \rangle^k + \langle \hat{\psi}_k \hat{\mathbf{v}}_k \rangle^k \quad (60)$$

Dans la suite, nous utiliserons l'hypothèse de Ni & Beckermann (1991) selon laquelle la corrélation entre les composantes de fluctuation de la masse volumique ρ et d'un autre champ ϕ , c'est-à-dire le terme $\langle \hat{\rho}_k \hat{\phi}_k \rangle^k$, est négligeable. En particulier, on a d'après (60) :

$$\langle \rho \mathbf{v} \rangle^k = \langle \rho \rangle^k \langle \mathbf{v} \rangle^k = \rho_k \mathbf{v}_k \quad (61)$$

6.2.2 Application aux différentes équations de conservation

A l'échelle microscopique, à l'intérieur de chacune des phases, l'évolution thermomécanique du matériau est supposée gouvernée par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cas d'un alliage métallique, nous ajoutons l'équation de conservation des espèces

chimiques. Pour simplifier, nous nous restreignons ici au cas d'un unique soluté (alliage binaire). Ces quatre équations sont rassemblées dans le Tableau 2.

Masse	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$	(62)
Quantité de mouvement	$\nabla \cdot \mathbf{s} - \nabla p + \rho \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \times \mathbf{v})$	(63)
Energie	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$	(64)
Soluté	$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	(65)

Tableau 2 : Equations de conservation valables à l'échelle microscopique dans chacune des phases, liquide et solide.

Précisons que dans les deux dernières équations, h désigne l'enthalpie massique (J kg^{-1}) et c le titre volumique (sans unité).

Concernant l'équation de conservation du soluté, on peut remarquer qu'elle reste identique en remplaçant le titre volumique c par la concentration volumique \tilde{c} exprimée en mole m^{-3} (voir plus loin l'expression de \mathbf{j} , proportionnel au gradient de c : équation (119)). Pour cela, il suffit de diviser (65) par le volume atomique du soluté considéré, $V_{\text{soluté}} = M_{\text{soluté}} / \rho_{\text{soluté}}$, avec $M_{\text{soluté}}$ la masse molaire, exprimée en kg mole^{-1} et $\rho_{\text{soluté}}$ la masse volumique du soluté, en kg m^{-3} . D'autre part, on a $c = (\rho / \rho_{\text{soluté}})w$ avec w le titre massique, sans unité. L'équation (65), multipliée par $\rho_{\text{soluté}}$ permet donc d'obtenir une équation similaire pour le titre massique :

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j}' = 0 \quad (66)$$

Nous considérons dorénavant un milieu semi-solide à deux phases : la phase liquide et la phase solide. La prise de moyenne des équations (62), (63), (64) et (65) pour chacune des deux phases sur V_0 conduit aux équations de conservation correspondantes à l'échelle macroscopique, présentées ci-dessous (équations (67) à (74) regroupées dans le Tableau 3). Ces équations, dont on pourra trouver la démonstration et la discussion dans (Ni & Beckermann, 1991 ; Rappaz et al., 1998 ; Bousquet-Melou et al., 2002), sont écrites en faisant apparaître les moyennes intrinsèques des différentes variables et en utilisant la notation simplifiée associée. On notera en particulier que dans le processus de prise de moyenne, des intégrales sur l'interface A apparaissent et génèrent les termes additionnels Γ , \mathbf{M} , \mathbf{Q} et \mathbf{J} , qui traduisent respectivement les échanges de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et de soluté entre les deux phases.

Pour chacune de ces équations, nous devons donc préciser les lois constitutives utilisées, ainsi que la formulation des termes d'échange interfaciaux. Nous verrons que ceci nécessite parfois le recours à une modélisation qui pourra s'appuyer soit sur des considérations phénoménologiques, soit sur des résultats issus de la théorie de l'homogénéisation ou des techniques de changement d'échelle.

<i>Phase liquide</i>		
Masse	$\frac{\partial}{\partial t}(g_l \rho_l) + \nabla \cdot (g_l \rho_l \mathbf{v}_l) = \Gamma_l$	(67)
Quantité de mouvement	$\nabla \cdot (g_l \boldsymbol{\sigma}_l) + \mathbf{M}_l + g_l \rho_l \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t}(g_l \rho_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \rho_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l)$	(68)
Energie	$\frac{\partial}{\partial t}(g_l \rho_l h_l) + \nabla \cdot (g_l \rho_l h_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot \langle \mathbf{q}^l \rangle = Q_l$	(69)
Soluté	$\frac{\partial}{\partial t}(g_l c_l) + \nabla \cdot (g_l c_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot \langle \mathbf{j}^l \rangle = J_l$	(70)
<i>Phase solide</i>		
Masse	$\frac{\partial}{\partial t}(g_s \rho_s) + \nabla \cdot (g_s \rho_s \mathbf{v}_s) = \Gamma_s$	(71)
Quantité de mouvement	$\nabla \cdot (g_s \boldsymbol{\sigma}_s) + \mathbf{M}_s + g_s \rho_s \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t}(g_s \rho_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_s \rho_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s)$	(72)
Energie	$\frac{\partial}{\partial t}(g_s \rho_s h_s) + \nabla \cdot (g_s \rho_s h_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot \langle \mathbf{q}^s \rangle = Q_s$	(73)
Soluté	$\frac{\partial}{\partial t}(g_s c_s) + \nabla \cdot (g_s c_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot \langle \mathbf{j}^s \rangle = J_s$	(74)

Tableau 3 : Equations de conservation du milieu biphasique à l'échelle macroscopique.

6.2.3 Conservation de la masse

Dans le contexte de la solidification, il est important de bien mettre en évidence le transfert de masse de la phase liquide vers la phase solide. Ce transfert est contenu dans la variable Γ_s dont on voit, en négligeant l'influence de la variation de ρ_s dans (71), que lorsqu'elle est positive elle contribue à l'augmentation de la fraction de solide g_s . Cette variable Γ_s représente un flux de quantité de mouvement à travers l'interface A , moyenné sur le volume élémentaire. En notant \mathbf{n}^s le vecteur normal à l'interface et sortant de la phase solide, et \mathbf{w} le vecteur vitesse de cette interface, on a :

$$\Gamma_s = -\frac{1}{V_0} \int_A \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}^s dS \quad (75)$$

L'écriture du bilan de matière à l'interface assure que la somme $\Gamma_s + \Gamma_l$ est nulle (Rappaz et al., 1998) et on obtient l'équation classique :

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (76)$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \langle \rho^l \rangle + \langle \rho^s \rangle = g_l \rho_l + g_s \rho_s \\ \langle \rho \mathbf{v} \rangle &= \langle (\rho \mathbf{v})^l \rangle + \langle (\rho \mathbf{v})^s \rangle = g_l \rho_l \mathbf{v}_l + g_s \rho_s \mathbf{v}_s \end{aligned} \quad (77)$$

En sommant les deux équations (67) et (71), et en supposant que les masses volumiques de chacune des deux phases sont constantes (mais différentes), on a :

$$\rho_s \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) + \rho_l \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l) = \frac{\partial g_s}{\partial t} (\rho_l - \rho_s) \quad (78)$$

ou encore, en divisant par ρ_l ,

$$(1 - \Delta\epsilon^{tr})\nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l) = \frac{\partial g_s}{\partial t} \Delta\epsilon^{tr} \quad (79)$$

où $\Delta\epsilon^{tr} = (\rho_l - \rho_s)/\rho_l$ représente le changement de volume relatif associé à la solidification (en général négatif).

Lorsqu'il n'y a pas de transfert de masse entre les deux phases, on a alors $\Gamma_s = 0$ dans (71), ce qui donne

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} = -\nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) \quad (80)$$

et la conservation de la masse du mélange se traduit par la nullité de la divergence de la vitesse de mélange, d'où l'équation plus simple :

$$\nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l) = 0 \quad (81)$$

6.2.4 Conservation de la quantité de mouvement

Une première question concernant cette équation est comment relier par une loi de comportement les tenseurs des contraintes apparaissant dans (68) et (72) aux champs de vitesse moyennés sur les phases liquide et solide, respectivement.

Nous nous intéresserons dans un second temps à la formulation des termes d'échange de quantité de mouvement entre les deux phases.

Comportement mécanique de la phase liquide

A l'échelle microscopique, il est généralement admis que le métal liquide se comporte comme un fluide newtonien incompressible. L'hypothèse d'incompressibilité est légitime dans la mesure où l'on applique la formulation biphasique sur un intervalle de température restreint (l'intervalle de solidification de l'alliage étudié). Nous avons donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = s - p\mathbf{I} \quad (82)$$

$$s = 2\mu_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) \quad (83)$$

où p désigne la pression hydrostatique, s la partie déviatoire de $\boldsymbol{\sigma}$, μ_l la viscosité du liquide, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v})$ le tenseur des taux de déformation (ici de trace nulle), partie symétrique du gradient de \mathbf{v} .

La prise de moyenne sur cette équation ne permet pas d'expliciter la loi de comportement au niveau macroscopique. Par conséquent, nous adopterons l'expression simplifiée proposée par Ganesan & Poirier (1990) et Rappaz et al. (1998) :

$$\langle s^I \rangle = 2\mu_l g_l \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}_l)) \quad (84)$$

où dev désigne la prise de partie déviatoire.

Comportement mécanique de la phase solide

Les études expérimentales sur le comportement des alliages métalliques à haute température montrent que le comportement de la phase solide est bien décrit par une loi de comportement de type Norton-Hoff. De même que pour le liquide, nous faisons l'approximation d'incompressibilité dans l'intervalle de solidification. Nous avons donc, à l'échelle microscopique dans la phase solide :

$$\boldsymbol{\sigma} = s - p\mathbf{I} \quad (85)$$

$$s = 2K(\sqrt{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{eq})^{m-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) \quad (86)$$

où K (Pa s^m) et m sont la consistance et la sensibilité à la vitesse de déformation et $\dot{\epsilon}_{eq}$ désigne le taux de déformation équivalent au sens de von Mises. La contrainte équivalente est alors donnée par :

$$\sigma_{eq} = K(\sqrt{3})^{m+1} \dot{\epsilon}_{eq}^m \quad (87)$$

Comme pour la phase liquide, la détermination explicite du comportement macroscopique de la phase solide doit faire appel à des considérations phénoménologiques.

Dans le domaine des fractions solides élevées, supérieures à la fraction de cohérence, les résultats théoriques de Geindreau & Auriault (1999) procurent une base solide pour définir un modèle macroscopique. En particulier, ils montrent que le tenseur déviateur macroscopique moyen dans le solide $\langle s^s \rangle$ est une fonction homogène de degré m (sensibilité à la vitesse) du tenseur macroscopique moyen des vitesses de déformation $\langle \dot{\epsilon} \rangle^s = \dot{\epsilon} \langle v \rangle^s$, partie symétrique du gradient du champ de vitesse moyen intrinsèque sur la phase solide $v_s = \langle v \rangle^s$. De plus, ils montrent que la pression moyenne sur la phase solide est de la forme :

$$\langle p^s \rangle = g_s p_l + \tilde{p}^s \quad (88)$$

Cette pression moyenne se décompose donc en une contribution due à la pression de la phase liquide et une contribution intrinsèque dont il est montré qu'elle est également une fonction homogène de degré m de $\dot{\epsilon}(v_s)$. En introduisant alors le tenseur des contraintes défini par :

$$\Sigma^s = \langle s^s \rangle - \tilde{p}^s \mathbf{I} \quad (89)$$

nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma^s &= \langle s^s \rangle - (\langle p^s \rangle - g_s p_l) \mathbf{I} \\ &= \langle \sigma^s \rangle + (1 - g_l) p_l \mathbf{I} \approx \langle \sigma^s \rangle + \langle \sigma^l \rangle + p_l \mathbf{I} \\ &\approx \langle \sigma \rangle - (-p_l \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (90)$$

Le tenseur des contraintes Σ^s apparaît alors comme le tenseur des contraintes effectives tel qu'utilisé en mécanique des sols à la suite de Terzaghi (1943), c'est-à-dire le tenseur moyen des contraintes auquel on retranche la partie sphérique due à la pression du fluide interstitiel (dont les termes visqueux ont été négligés, au passage). Cette formulation du tenseur des contraintes effectives, pour lequel une équation de comportement va devoir être formulée, est en accord avec les résultats théoriques obtenus par De Boer & Ehlers (1990) lorsque les deux phases sont intrinsèquement incompressibles et correspond à l'approche adoptée par Martin et al. (1997).

En vertu de (89) et des résultats d'homogénéité précédents, nous assimilons la phase solide à un milieu continu compressible viscoplastique. Nous adoptons ici un formalisme de type viscoplastique compressible isotrope analogue à celui proposé par N'Guyen et al. (1994), suivant en cela les modélisations proposées par Shima & Oyane (1976), et le formalisme et les justifications thermodynamiques développées par Abouaf (1985), dans le domaine de la mise en forme de poudres métalliques. Dans ce cas, la contrainte et le taux de déformation équivalents sont définis comme suit :

$$\Sigma_{eq}^s = \left[A \text{dev}(\Sigma^s) : \text{dev}(\Sigma^s) + B (\text{tr} \Sigma^s)^2 \right]^{1/2} \quad (91)$$

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle_{eq}^s{}^2 = \frac{1}{A} \langle \dot{\epsilon} \rangle^s : \langle \dot{\epsilon} \rangle^s + \left(\frac{1}{9B} - \frac{1}{3A} \right) (\text{tr} \langle \dot{\epsilon} \rangle^s)^2 \quad (92)$$

où $\langle \dot{\epsilon} \rangle^s$ désigne la partie symétrique du tenseur gradient de $\langle v \rangle^s$. Ces expressions font apparaître deux fonctions rhéologiques A et B qui ne dépendent que de la fraction volumique de solide, et dont différentes expressions peuvent être trouvées dans N'Guyen et al. (1994), Martin et al. (1997), Abouaf et al. (1988). La loi de comportement adoptée pour la phase solide prend alors la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^s = 3K(\sqrt{3}\langle\dot{\epsilon}\rangle_{eq}^s)^{m-1} \left(\frac{1}{A}\langle\dot{\epsilon}\rangle^s + \left(\frac{1}{9B} - \frac{1}{3A} \right) \text{tr}\langle\dot{\epsilon}\rangle^s \mathbf{I} \right) \quad (93)$$

En séparant parties déviatoires et sphériques, on a :

$$\text{dev}(\boldsymbol{\Sigma}^s) = 3K(\sqrt{3}\langle\dot{\epsilon}\rangle_{eq}^s)^{m-1} \frac{1}{A} \text{dev}\langle\dot{\epsilon}\rangle^s \quad (94)$$

$$-\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^s) = -3K(\sqrt{3}\langle\dot{\epsilon}\rangle_{eq}^s)^{m-1} \frac{1}{9B} \text{tr}\langle\dot{\epsilon}\rangle^s \quad (95)$$

et entre équivalents monodimensionnels,

$$\Sigma_{eq}^s = K(\sqrt{3})^{m+1} (\langle\dot{\epsilon}\rangle_{eq}^s)^m \quad (96)$$

Ce modèle est relativement simple et permet une première introduction de la compressibilité d'un squelette solide dans la sollicitation mécanique globale d'une zone pâteuse. On pourra consulter à ce sujet les récents travaux d'Olivier Ludwig (2004) qui suggère de compléter ce modèle en introduisant une variable d'état représentant la cohésion de ce squelette. Une loi d'évolution de cette variable est également proposée de façon à représenter la résistance à la traction des films liquides intergranulaires ainsi que des éventuels ponts solides formés entre grains. Ces modifications permettent d'obtenir une meilleure réponse du modèle dans le domaine des petites déformations, comme celles rencontrées dans le cas de la coulée continue.

Echange de quantité de mouvement

Le vecteur \mathbf{M}_k traduisant l'échange de quantité de mouvement relatif à une des deux phases k a l'expression suivante :

$$\mathbf{M}_k = \frac{1}{V_0} \int_{A_k} \boldsymbol{\sigma}_k^* \mathbf{n}^k dS = \frac{1}{V_0} \int_{A_k} \mathbf{s}_k^* \mathbf{n}^k dS - \frac{1}{V_0} \int_{A_k} p_k^* \mathbf{n}^k dS \quad (97)$$

où l'astérisque indique que les valeurs sont prises à l'interface. Il est à noter que la contribution provenant des termes d'interface issus de la prise de moyenne des termes inertiels est négligée. Comme Ni & Beckermann (1991), nous pensons que ces termes, qui apparaissent comme la contribution du changement de phase au transfert de quantité de mouvement, sont effectivement petits, dans les cas qui nous intéressent, devant les termes dissipatifs associés aux contraintes interfaciales. Le vecteur \mathbf{M}_k se décompose ainsi en deux termes, dont le second s'exprime à l'aide du gradient de la fraction volumique de la phase en question :

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_k^d + p_k^* \nabla g_k \quad (98)$$

Dans le milieu semi-solide considéré, en prenant en compte les effets de tension de surface, qui génèrent un terme de source de quantité de mouvement à l'interface, on peut démontrer que l'on a nécessairement (Ni & Beckermann, 1991) :

$$\mathbf{M}_s^d + \mathbf{M}_l^d = 0 \quad (99)$$

ce qui traduit le principe de l'action et de la réaction sur la partie dissipative de ce transfert.

Pour ce qui concerne la partie hydrostatique, nous ferons l'hypothèse que les pressions à l'interface sont identiques, égales à la moyenne intrinsèque de la pression liquide :

$$p_l^* = p_s^* = \langle p \rangle^l = p_l \quad (100)$$

Pour ce qui concerne la partie dissipative \mathbf{M}^d de la densité volumique de force associée au transfert, nous l'abordons de deux façons différentes, selon que la phase solide est structurée en un squelette solide ou bien constituée de grains évoluant dans le bain liquide.

Dans le premier cas, correspondant aux fractions de solide supérieures à la fraction dite de cohérence, la densité de force \mathbf{M}_l^d agissant sur la phase liquide est très souvent interprétée comme la densité de force

résistante à l'écoulement du liquide à travers le squelette solide, celui-ci étant considéré comme un milieu poreux. Le métal liquide étant newtonien, le vecteur \mathbf{M}_l^d peut être modélisé par un terme d'échange de type Darcy exprimé en fonction du différentiel de vitesses moyennes intrinsèques (Hassanizadeh & Gray, 1979). Une telle approche a été confirmée par les travaux d'homogénéisation de Geindreau & Auriault (1999) :

$$\mathbf{M}_l^d = -g_l^2 \mu_l \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \quad (101)$$

Dans cette expression, \mathbf{K} est un tenseur de perméabilité, symétrique, traduisant l'éventuelle anisotropie du milieu solide. Ce tenseur se réduit à une perméabilité scalaire, K , dans le cas d'un milieu solide équiaxe, parfaitement isotrope. Différents modèles peuvent être utilisés pour l'évaluation de la ou des composantes de \mathbf{K} en fonction de la fraction volumique de liquide g_l et d'autres paramètres microstructuraux (Poirier, 1987 ; Ganesan & Poirier, 1990 ; Bernard et al., 2003). Une expression scalaire très fréquemment utilisée est celle proposée par Carman-Kozeny :

$$K = \frac{\lambda_2^2 g_l^3}{180(1 - g_l)^2} \quad (102)$$

où λ_2 est la distance interdendritique secondaire.

Pour retrouver la loi classique de Darcy, modélisant l'écoulement d'un fluide en milieu poreux isotrope (Darcy, 1856), il suffit de considérer l'équation de la quantité de mouvement du liquide (68) et d'y injecter le terme d'échange \mathbf{M}_l tel que défini par les relations (98), (100) et (101). On obtient alors, en négligeant les termes déviatoires dus à la viscosité ainsi que les termes d'inertie :

$$-g_l \nabla p_l - g_l^2 \mu_l \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) + g_l \rho_l \mathbf{g} = 0 \quad (103)$$

soit la loi bien connue, dans laquelle le terme de gravité est souvent négligé :

$$\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s = -\frac{K}{g_l \mu_l} (\nabla p_l - \rho_l \mathbf{g}) \quad (104)$$

Dans le second cas, correspondant aux fractions de solide inférieures au seuil de cohérence, la phase solide est constituée de grains en mouvement dans le liquide. La densité de force d'interaction \mathbf{M}_s^d peut alors être vue comme une force de traînée hydrodynamique. Ainsi, Drew (1983) propose l'expression suivante :

$$\mathbf{M}_s^d = C |\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s| (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \quad (105)$$

dans laquelle le coefficient C est fonction d'un facteur de forme des grains et d'un coefficient de traînée. On constate que cette expression est de même nature que celle de Darcy, faisant intervenir la vitesse relative entre les deux phases. Le concept d'échange de quantité de mouvement permet d'inclure dans un même cadre théorique la sédimentation de particules solides et l'écoulement de liquide en milieu poreux.

6.2.5 Conservation de l'énergie

Dans l'hypothèse d'une isotropie thermique à l'échelle microscopique dans chacune des phases, le vecteur flux de chaleur est déterminé par la loi de Fourier : il est proportionnel au gradient de température par l'intermédiaire d'une conductibilité thermique (scalaire) λ :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (106)$$

Comme il est généralement admis dans la majorité des formalismes spécifiques aux procédés de solidification, les phases sont supposées à l'équilibre thermique local, ce qui est justifié par le fait que les propriétés thermiques des deux phases ne sont pas trop différentes et que les résistances thermiques de contact entre phases sont faibles (Rappaz et al., 1998 ; Auriault & Ene, 1994) :

$$T_s = T_l = T \quad (107)$$

Les enthalpies massiques de chacune des phases peuvent alors s'écrire en fonction de ce seul champ de température T . En adoptant les expressions proposées par Combeau & Lesoult (1994), dans lesquelles les effets de la pression sont négligés et où la chaleur latente de solidification est considérée constante, et en identifiant la chaleur massique des deux phases c_p , on a :

$$h_s = \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad h_l = h_s + L \quad (108)$$

L désignant la chaleur latente de fusion par unité de masse.

On est donc enclin, du fait de l'hypothèse d'équilibre thermique, à écrire la conservation de l'énergie sous la forme d'une équation unique, obtenue par la sommation des bilans d'énergie de chaque phase, dans laquelle les termes d'échange Q_l et Q_s s'annulent. On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho h \rangle + \nabla \cdot \langle \rho h \mathbf{v} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{q} \rangle = 0 \quad (109)$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} \langle \rho h \rangle &= \langle (\rho h)^l \rangle + \langle (\rho h)^s \rangle = g_l \rho_l h_l + g_s \rho_s h_s \\ \langle \rho h \mathbf{v} \rangle &= \langle (\rho h \mathbf{v})^l \rangle + \langle (\rho h \mathbf{v})^s \rangle = g_l \rho_l h_l \mathbf{v}_l + g_s \rho_s h_s \mathbf{v}_s \\ \langle \mathbf{q} \rangle &= \langle \mathbf{q}_s \rangle + \langle \mathbf{q}_l \rangle = -(g_s \lambda_s + g_l \lambda_l) \nabla T = -\langle \lambda \rangle \nabla T \end{aligned} \quad (110)$$

On peut remarquer au passage que la seconde égalité dans (110a), qui résulte de l'omission des termes de fluctuation (équation (61)), entraîne :

$$\langle \rho h \rangle = \langle \rho \rangle \langle h \rangle \quad (111)$$

En effet, l'expression de l'enthalpie massique moyenne est alors :

$$\langle h \rangle = \frac{g_l \rho_l}{\langle \rho \rangle} h_l + \frac{g_s \rho_s}{\langle \rho \rangle} h_s = f_l h_l + f_s h_s \quad (112)$$

ce qui correspond bien à une pondération des enthalpies massiques par les fractions massiques de chacune des phases. D'autre part, en utilisant l'équation de conservation de la masse, qui résulte de la sommation de (67) et (71),

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (113)$$

en supposant constantes, mais différentes, les masses volumiques du solide et du liquide, et en remarquant que

$$\langle \rho h \mathbf{v} \rangle = \langle h \rangle \langle \rho \mathbf{v} \rangle + L f_s f_l \langle \rho \rangle (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \quad (114)$$

l'équation (109) se met finalement sous la forme d'une équation d'advection-diffusion de l'enthalpie moyenne $\langle h \rangle$:

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle h \rangle \langle \rho \mathbf{v} \rangle + L \nabla \cdot (f_s f_l \langle \rho \rangle (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) - \nabla \cdot (\langle \lambda \rangle \nabla T) = 0 \quad (115)$$

En faisant apparaître le gradient de l'enthalpie de la phase liquide dans le terme d'advection, on a la forme équivalente :

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \nabla h_l \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle + L \left(\rho_l f_s \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - \rho_s f_l \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^s \rangle \right) - \nabla \cdot (\langle \lambda \rangle \nabla T) = 0 \quad (116)$$

On constate que l'advection d'énergie correspond au transport de l'enthalpie de la phase liquide par la vitesse moyenne du mélange, ce qui nécessite un terme de source correcteur prenant en compte notamment

l'influence de la contraction. D'autre part, ce gradient de l'enthalpie de la phase liquide s'exprime aisément en fonction de la température. En effet,

$$\nabla h_l = \frac{\partial h_l}{\partial x} = \frac{\partial h_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial h_s}{\partial T} \nabla T = c_p \nabla T \quad (117)$$

En exprimant différemment le terme correcteur facteur de la chaleur latente, l'équation de conservation de l'énergie se met donc sous la forme :

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + c_p \nabla T \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle + L \left(\rho_l \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - f_l \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle \right) - \nabla \cdot (\langle \lambda \rangle \nabla T) = 0 \quad (118)$$

Dans la section 6.3, nous verrons la restriction de cette équation dans le cas où le solide est fixe et où les termes de retrait à la solidification sont négligés.

6.2.6 Conservation du soluté

Le vecteur flux de soluté est déterminé à l'échelle microscopique par la première loi de Fick, considérée ici sous sa forme isotrope :

$$\mathbf{j} = -D \nabla c \quad (119)$$

D étant le coefficient de diffusion. En sommant les équations de conservation moyennées sur les deux phases, (70) et (74), dont les termes d'interface s'annulent, nous obtenons :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle c \mathbf{v} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{j} \rangle = 0 \quad (120)$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= \langle c^l \rangle + \langle c^s \rangle = g_l c_l + g_s c_s \\ \langle c \mathbf{v} \rangle &= \langle (c \mathbf{v})^l \rangle + \langle (c \mathbf{v})^s \rangle = g_l c_l \mathbf{v}_l + g_s c_s \mathbf{v}_s \\ \langle \mathbf{j} \rangle &= \langle \mathbf{j}^s \rangle + \langle \mathbf{j}^l \rangle = -\langle (D \nabla c)^s \rangle - \langle (D \nabla c)^l \rangle = -g_s D_s \nabla c_s - g_l D_l \nabla c_l \end{aligned} \quad (121)$$

A l'échelle macroscopique, nous négligeons les effets de diffusion dans la phase solide par rapport à ceux survenant dans la phase liquide. On obtient alors en faisant apparaître les champs de vitesse intrinsèque de chacune des phases :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_l c_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) - \nabla \cdot (g_l D_l \nabla c_l) = 0 \quad (122)$$

Dans cette dernière équation, les termes de diffusion dans la phase liquide sont eux-mêmes, la plupart du temps, faibles à l'échelle du procédé et on pourra les négliger. Comme pour la conservation de l'énergie, nous verrons à la section 6.3 la restriction de cette équation dans le cas où le solide est fixe et où les termes de retrait sont négligés.

Echange de soluté entre liquide et solide : modèle de microségrégation

L'échange de soluté entre les phases est gouverné par les phénomènes d'interface à l'échelle des bras dendritiques. Cette physique des interfaces hors équilibre est très complexe et dans le cadre de l'étude des macroségrégations, elle est abordée ici en effectuant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Outre l'uniformité de la température dans le v.e.r., déjà évoquée, on suppose qu'au niveau de l'interface, les deux phases sont en équilibre thermodynamique, conformément au diagramme de phases de l'alliage. Ainsi on a deux relations à l'interface :

$$\begin{aligned} c_s^* &= k(T) c_l^* \\ c_l^* &= \mathcal{L}(T) \end{aligned} \quad (123)$$

dans lesquelles le coefficient de partage k , dépendant de la température, et l'équation de la ligne de liquidus $\mathcal{L}(T)$ peuvent être déduits du diagramme de phases. En première approche, il est légitime de considérer k constant et \mathcal{L} linéaire, ce que traduit la Figure 33.

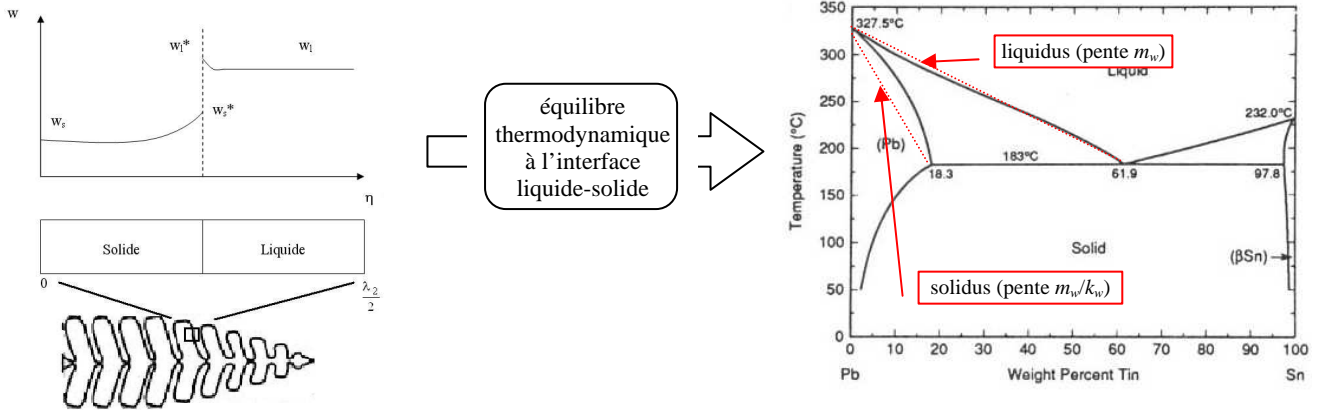


Figure 33. Condition locale d'équilibre thermodynamique à l'interface liquide-solide, à l'échelle microscopique. Cet équilibre est gouverné par le diagramme de phases, pour lequel est présentée l'approximation de pente de liquidus et de coefficient de partage constants¹.

De plus, on suppose qu'à l'échelle microscopique la diffusion du soluté dans la phase liquide est parfaite : sa concentration est donc uniforme dans le volume élémentaire et en particulier $c_l^* = c_l$. On a donc :

$$\begin{aligned} c_s^* &= k c_l \\ c_l &= \frac{T - T_m}{m} \end{aligned} \quad (124)$$

où m est la pente de la ligne de liquidus dans le diagramme binaire.

En ce qui concerne la diffusion du soluté dans la phase solide, nous considérons les deux cas limite classiques de diffusion parfaite et nulle :

- *Diffusion parfaite dans le solide : règle des bras de leviers.* Dans ce cas, la concentration dans la phase solide est également uniforme, à l'échelle du volume élémentaire et en particulier $c_s^* = c_s$. Les équations à résoudre sont alors :

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= g_l c_l + g_s c_s = (g_l + (1 - g_l)k) c_l \\ T &= T_m + m c_l \\ \langle h \rangle &= \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + f_l L = \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + \frac{g_l \rho_l}{g_l \rho_l + (1 - g_l) \rho_s} L \end{aligned} \quad (125)$$

On voit que pour un titre volumique moyen $\langle c \rangle$ donné, connaissant l'enthalpie massique moyenne $\langle h \rangle$ issue de la conservation de l'énergie, ce système non linéaire à trois équations permet de calculer g_l, T, c_l (et donc c_s).

- *Diffusion nulle dans le solide : loi de Scheil.* Dans ce cas, la relation (125a) est un peu différente :

$$\langle c \rangle = g_l c_l + \int_0^{g_s} c_s^* d g_s = g_l c_l + \int_0^{g_s} k c_l d g_s \quad (126)$$

Il convient alors de considérer la forme différentielle de cette égalité et les équations à résoudre sont les suivantes :

¹ Le diagramme de la Figure 33 étant donné en titre massique, on a par rapport aux coefficients définis pour des titres volumiques par (124) les relations suivantes : $k_w = k \rho_l / \rho_s$ et $m_w = m \rho_l / \rho_{\text{soluté}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial (g_l c_l)}{\partial t} + k c_l \frac{\partial g_s}{\partial t} \\
T &= T_m + m c_l \\
\langle h \rangle &= \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + \frac{g_l \rho_l}{g_l \rho_l + (1 - g_l) \rho_s} L
\end{aligned} \tag{127}$$

Là encore, on voit que pour $\langle c \rangle$ et $\langle h \rangle$ connus, en posant une discrétisation temporelle des dérivées présentes dans (127a), ce système non linéaire à trois équations permet de calculer g_l, T, c_l .

En dehors de ces deux cas limite, si on veut tenir compte de la vitesse de diffusion réelle dans la phase solide, il convient de résoudre l'équation de diffusion instationnaire du soluté dans une géométrie monodimensionnelle à interface mobile représentative des longueurs caractéristiques de la microstructure et/ou des phénomènes de diffusion considérés. On pourra se référer à (Poirier et al., 1991 ; Mo, 1994 ; Combeau et al., 1996) et plus récemment, pour un modèle comprenant une résolution par différences finies 1D de la diffusion dans le solide et dans le liquide, avec éléments d'alliages multiples et prise en compte de la transformation $\delta\gamma$ dans le cas des aciers, à (Thuinet et al., 2003).

6.2.7 Forme finale des équations en formulation biphasique

La forme finale des équations est résumée dans le Tableau 4. Nous considérons ici que les masses volumiques de chacune des deux phases sont constantes (mais différentes) dans l'intervalle de solidification.

<i>Phase liquide</i>		
Masse	$\frac{\partial}{\partial t}(g_l \rho_l) + \nabla \cdot (g_l \rho_l \mathbf{v}_l) = \Gamma_l$	(128)
Quantité de mouvement	$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^l \rangle - g_l \nabla p_l + \mathbf{M}_l^d + g_l \rho_l \mathbf{g} = \rho_l \frac{\partial}{\partial t}(g_l \mathbf{v}_l) + \rho_l \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l)$	(129)
<i>Phase solide</i>		
Masse	$\frac{\partial}{\partial t}(g_s \rho_s) + \nabla \cdot (g_s \rho_s \mathbf{v}_s) = \Gamma_s$	(130)
Quantité de mouvement	$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^s \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}^s \rangle + p_l \nabla g_s - \mathbf{M}_l^d + g_s \rho_s \mathbf{g} = \rho_s \frac{\partial}{\partial t}(g_s \mathbf{v}_s) + \rho_s \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s)$ ou $\nabla \cdot \Sigma^s - g_s \nabla p_l - \mathbf{M}_l^d + g_s \rho_s \mathbf{g} = \rho_s \frac{\partial}{\partial t}(g_s \mathbf{v}_s) + \rho_s \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s)$	(131)
<i>Bilans</i>		
Masse	$(1 - \Delta \varepsilon^{tr}) \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l) = \frac{\partial g_s}{\partial t} \Delta \varepsilon^{tr}$	(132)
Energie	$\langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + c_p \nabla T \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle + L(\rho_l \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - f_l \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle) - \nabla \cdot (\langle \lambda \rangle \nabla T) = 0$	(133)
Soluté	$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_l c_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) - \nabla \cdot (g_l D_l \nabla c_l) = 0$	(134)

Tableau 4 : Equations de conservation du milieu biphasique à l'échelle macroscopique.

6.2.8 Forme faible des équations du problème mécanique

L'objectif est ici de formuler le problème mécanique sous forme faible, de façon à le résoudre en formulation vitesse-pression par éléments finis. Nous choisissons ici de résoudre en vitesses moyennes intrinsèques des phases liquide et solide, \mathbf{v}_s et \mathbf{v}_l , et en pression moyenne intrinsèque de liquide p_l . Pour une présentation de la résolution en vitesse moyenne intrinsèque de solide, vitesse moyenne de liquide $\langle \mathbf{v}^l \rangle$ et pression moyenne intrinsèque de liquide, on pourra consulter (Le Corre & Bellet, 2004).

Précisons les conditions aux limites utilisées :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{imp} & \text{sur } \partial\Omega_v \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^s \mathbf{n} &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^l \mathbf{n} = \mathbf{T}_{imp} & \text{sur } \partial\Omega_s \end{aligned} \quad (135)$$

La première condition indique que dans le cas d'une condition en vitesse imposée, les deux phases sont supposées avoir la même vitesse intrinsèque, égale à cette vitesse. La seconde condition, qui postule que les contraintes normales sont intrinsèquement les mêmes sur les deux phases n'est admissible que dans le cadre d'un milieu saturé en liquide.

On définit alors les espaces suivants.

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \nabla q \in (L^2(\Omega))^2 \right\} \\ \vartheta &= \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (H^1(\Omega))^4 \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{v}_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_v \right\} \\ \vartheta_0 &= \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (H^1(\Omega))^4 \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v \right\} \end{aligned} \quad (136)$$

La solution $(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_s, p_l) \in \vartheta \times L^2(\Omega)$ doit vérifier (cf. calcul détaillé en annexe) :

$$\forall (\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, p^*) \in \mathcal{V}_0 \times L^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \sigma^l \rangle : \nabla \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} p_l \nabla \cdot (g_l \mathbf{u}^*) - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^l \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} g_l^2 \mu_l \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} g_l \rho_l \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^* \\ + \int_{\Omega} \rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \right) \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Sigma^s : \nabla \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} p_l \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}^*) - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^s \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} g_l^2 \mu_l \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} g_s \rho_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* \\ + \int_{\Omega} \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s) \right) \cdot \mathbf{v}^* = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

$$\int_{\Omega} p^* \left(-(1 - \Delta \varepsilon^{tr}) \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s) - \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l) + \frac{\partial g_s}{\partial t} \Delta \varepsilon^{tr} \right) = 0 \quad (139)$$

- L'équation du principe des puissances virtuelles, appliquée au milieu solide (138), est obtenue en prenant la forme faible de l'équation (131), dans laquelle le tenseur des contraintes effectives doit satisfaire la loi de comportement viscoplastique compressible (93).
- L'équation du principe des puissances virtuelles, appliquée au milieu liquide (137) est obtenue de manière analogue à celle du solide, à partir de (129).
- La forme faible de l'équation de conservation de la masse globale (139) est obtenue en écrivant la forme faible correspondant à la sommation des équations (128) et (130), en considérant ρ_s et ρ_l constantes et en faisant apparaître $\Delta \varepsilon^{tr}$, le changement de volume relatif associé à la solidification (négatif).

En dimension 2, la discrétisation spatiale de ces équations est effectuée au moyen d'un élément triangulaire (P1+)²/P1 dans lequel les champs \mathbf{v}_l et \mathbf{v}_s sont de type P1+, c'est-à-dire linéaires continus aux nœuds avec des degrés de liberté additionnels au centre de l'élément, interpolés linéairement sur chacun des trois sous-triangles de l'élément. Le champ de pression p_l est quant à lui linéaire continu aux nœuds. Pour plus de détails sur la discrétisation spatiale, on pourra consulter (Le Corre & Bellet, 2004). On aboutit à la résolution d'un système non linéaire global :

$$\mathbf{R}_{méca}(\mathbf{V}_l, \mathbf{V}_s, \mathbf{P}_l) = 0 \quad (140)$$

Les inconnues sont les deux vecteurs des vitesses intrinsèques de liquide et de solide en chaque nœud (respectivement \mathbf{V}_l et \mathbf{V}_s) et le vecteur des pressions intrinsèques de liquide en chaque nœud, \mathbf{P}_l . Ce système global est résolu par une méthode de Newton-Raphson. L'obtention des champs de vitesse permet l'actualisation de la configuration à l'aide d'un schéma temporel analogue à (16). Il est à noter que cette résolution simultanée des problèmes moyennés sur le solide et sur le liquide s'est avérée beaucoup plus robuste qu'une première tentative de résolution alternée, de type point fixe, des deux problèmes.

6.2.9 Forme faible des équations du problème thermique

La forme faible correspondant à l'équation (133) est la suivante :

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} c_p \nabla T \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle \varphi + \int_{\Omega} \langle \lambda \rangle \nabla T \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \phi(T) \varphi = - \int_{\Omega} L (\rho_l \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - f_l \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle) \varphi \quad (141)$$

où $\phi(T)$ désigne le flux thermique en frontière (compté positivement si entrant). La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide d'une formulation SUPG, de façon à éviter les oscillations associées à une simple discrétisation de type Galerkin standard. Après introduction d'un schéma de discrétisation temporelle, cette équation se met sous la forme d'un système d'équations non linéaires ayant pour inconnue le vecteur des enthalpies moyennes nodales en fin d'incrément :

$$\mathbf{R}_{ther}(\mathbf{H}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (142)$$

La résolution de ce système est effectuée au moyen d'une méthode de Newton-Raphson en utilisant les dérivées partielles $\partial T / \partial \langle h \rangle$ aux nœuds du maillage (point sur lequel nous reviendrons dans la description de l'algorithme global).

6.2.10 Forme faible des équations du problème de transport de soluté

La forme faible correspondant à l'équation (134) est la suivante :

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_s) \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (g_l c_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) \varphi - \int_{\partial\Omega} \varphi g_l D_l \nabla c_l \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot g_l D_l \nabla c_l = 0 \quad (143)$$

Deux types de méthode peuvent être utilisés pour résoudre ce problème, pour lequel nous considérons la concentration volumique moyenne $\langle c \rangle$ comme variable principale. La première consiste à résoudre par Newton-Raphson, comme pour l'équation de conservation de l'énergie. L'autre approche consiste en une méthode de « splitting » initialement proposée par Prakash & Voller (1989) dans le contexte plus simple du problème biphasique à phase solide fixe.

Méthode de Newton-Raphson

Aux limites, le flux de soluté est nul à travers les parois du domaine de calcul. Ceci se traduit par la condition :

$$\nabla \langle c \rangle \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (144)$$

Comme le terme de diffusion porte sur c_l , nous remplaçons le terme de bord généré par l'intégration par parties par un terme de pénalisation numérique de façon à prendre en compte la condition (144). Le paramètre χ_c étant choisi arbitrairement grand positif, nous avons :

$$\forall \varphi \int_{\Omega} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_s) \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (g_l c_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) \varphi - \int_{\partial\Omega} \varphi \chi_c \nabla \langle c \rangle \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot g_l D_l \nabla c_l = 0 \quad (145)$$

Après discrétisation spatiale de type SUPG et introduction d'un schéma de discrétisation temporelle, cette équation se met sous la forme d'un système d'équations non linéaires ayant pour inconnue le vecteur des concentrations moyennes nodales en fin d'incrément :

$$\mathbf{R}_{sol}(\mathbf{C}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (146)$$

La résolution de ce système est effectuée au moyen d'une méthode de Newton-Raphson en utilisant les dérivées partielles $\partial c_l / \partial \langle c \rangle$ calculées aux nœuds du maillage. Ces dérivées proviennent du modèle de microségrégation utilisé. Dans le cas de la règle des bras de leviers, on a par exemple :

$$\frac{\partial c_l}{\partial \langle c \rangle} = \frac{1}{g_l + (1 - g_l)k} \quad (147)$$

où k désigne le coefficient de partage associé à la concentration volumique c .

Méthode de splitting

Dans cette méthode, la forme faible de l'équation (134) est transformée en appliquant les opérateurs sur $\langle c \rangle$ au lieu de c_l et en explicitant un second membre correcteur :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \quad & \int_{\Omega} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_s) \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\langle c \rangle (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) \varphi - \int_{\Omega} \nabla \cdot (g_l D_l \nabla \langle c \rangle) \varphi \\
& = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left((\langle c \rangle^{(*)} - (g_l c_l)^{(*)}) (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \right) \varphi - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(g_l D_l \nabla (\langle c \rangle^{(*)} - c_l^{(*)}) \right) \varphi
\end{aligned} \tag{148}$$

Les exposants $(*)$ signifient ici que l'on utilise la valeur la plus récemment calculée de la variable concernée. Selon l'algorithme de couplage choisi (voir paragraphe suivant), cette valeur peut être celle de l'incrément précédent, ou bien celle d'une itération précédente à l'intérieur de l'incrément de temps courant. Après calcul et en tenant compte de la condition de flux nul (144), on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \quad & \int_{\Omega} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\langle c \rangle \mathbf{v}_l) \varphi + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot g_l D_l \nabla \langle c \rangle \\
& = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left((\langle c \rangle^{(*)} - (g_l c_l)^{(*)}) (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \right) \varphi + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot g_l D_l \nabla (\langle c \rangle^{(*)} - c_l^{(*)}) + \int_{\partial \Omega} \varphi g_l D_l \nabla c_l^{(*)} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{149}$$

Après discrétisation, on aboutit dans ce cas à un système d'équations linéaires ayant pour inconnue le vecteur des concentrations moyennes nodales en fin d'incrément.

6.2.11 Algorithmes de résolution

La résolution incrémentale du problème thermomécanique couplé peut alors s'envisager comme indiqué à la Figure 34. Etant données les interactions fortes entre la résolution de chacune des équations de conservation, on peut envisager des variantes. L'algorithme de base consiste à résoudre séquentiellement – à l'intérieur d'un même incrément de temps, bien entendu – les différentes équations. A l'inverse, on peut tenter de converger sur les différentes résolutions, ainsi que l'indique la boucle légendée « couplage complet » sur la figure.

On remarque sur cet algorithme que le module de microségrégation est nécessairement appelé lors de la résolution de la conservation de l'énergie. En effet, les dérivées $\partial T / \partial \langle h \rangle$ aux nœuds du maillage, nécessaires à l'établissement de la matrice tangente, sont calculées par ce module. En outre, il doit être appelé après résolution du transport global de soluté : connaissant alors $\langle h \rangle$ et $\langle c \rangle$, les nouvelles valeurs de la température, fraction liquide et autres variables peuvent être calculées aux nœuds.

Remarquons enfin que la Figure 34 est établie dans l'hypothèse de l'utilisation de la méthode de splitting pour la résolution du transport de soluté. En effet, dans ce cas, ce problème est linéaire et il n'est pas nécessaire d'appeler le module de ségrégation pour calculer les dérivées $\partial c_l / \partial \langle c \rangle$. Le module de microségrégation n'est appelé qu'après résolution globale en titre moyen.

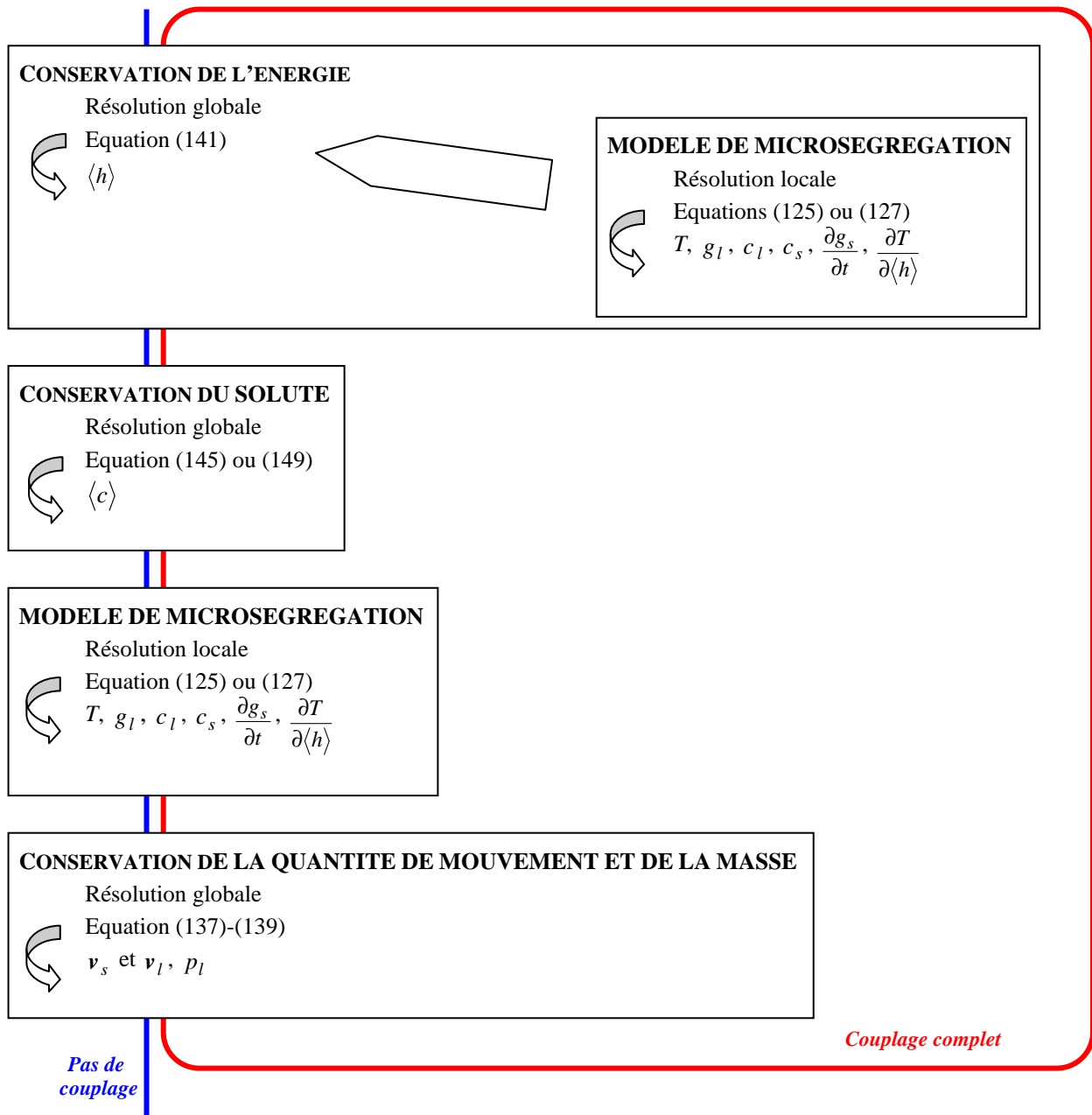


Figure 34. Algorithme de résolution incrémentale du problème diphasique complet

Cas où le chemin de solidification est connu

Lorsque le chemin de solidification $g_s(T)$ est connu et qu'on ne calcule pas le transport de soluté, l'algorithme se simplifie comme indiqué à la Figure 35. Dans ce cas, le module de microségrégation est remplacé par un module de calcul de la température en chaque nœud. En effet, la relation entre enthalpie moyenne et température s'écrit alors, en vertu de (112) :

$$\langle h \rangle = \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + f_l(T)L \quad (150)$$

Et la température peut facilement être obtenue par une résolution de l'équation non linéaire précédente, par exemple par une méthode de Newton. On en déduit d'autre part la variable auxiliaire $\partial T / \partial \langle h \rangle$ utilisée dans la résolution de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial \langle h \rangle} = \frac{1}{c_p(T) + L \frac{\partial f_l}{\partial T}} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f_l}{\partial T} = -\frac{\rho_s \rho_l}{\langle \rho \rangle^2} \frac{\partial g_s}{\partial T} \quad (151)$$

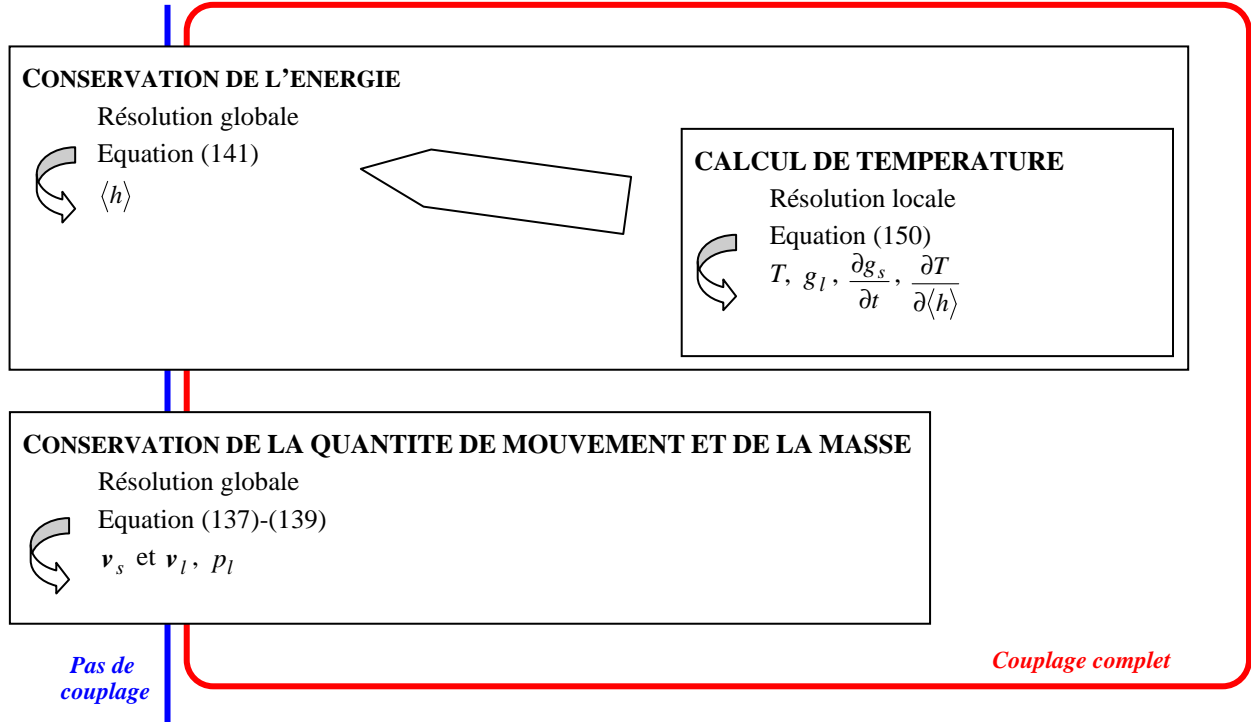


Figure 35. Algorithme de résolution incrémentale du problème diphasique complet, dans le cas où le chemin de solidification est connu.

6.3 MODELE AVEC HYPOTHESE DE SOLIDE FIXE NON DEFORMABLE

Dans le cadre de l'approche diphasique précédente, il est très fréquent de négliger le mouvement et la déformation de la phase solide. Cette hypothèse est généralement émise dans le contexte d'une solidification de type colonnaire et dans l'objectif de modéliser la macroségrégation. Le problème est abordé en formulation eulérienne (maillage fixe), en acceptant bien sûr de « faire l'impasse » sur les effets de la déformation de la phase solide et du retrait à la solidification. Cette formulation a été mise en œuvre en dimension 2 par de nombreux auteurs, par exemple Bennon & Incropera (1987), Combeau et al. (1990) dans le cadre de simulations par la méthode des volumes finis, Ahmad (1995) et Jalanti (2001) en éléments finis. Les modélisations tridimensionnelles sont encore rares. Citons les récents travaux de Desbiolles et al. (2003) qui ont proposé une application en éléments finis, ou ceux de Quillet (2003) en volumes finis avec le logiciel commercial Fluent.

Les équations dérivent donc des équations du modèle diphasique complet présenté dans la section précédente, en supposant $\mathbf{v}_s = 0$ et $\rho_s = \rho_l = \rho = \text{cste}$. Les équations du Tableau 4 deviennent celles figurant dans le Tableau 5 :

Quantité de mouvement du liquide	$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^l \rangle - g_l \nabla p_l + \mathbf{M}_l^d + g_l \rho_l \mathbf{g} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \rho \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l)$	(152)
Masse du mélange	$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle = 0$	(153)
Energie du mélange	$\rho \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \rho \nabla h_l \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - \nabla \cdot (\langle \lambda \rangle \nabla T) = 0$	(154)
Soluté	$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla c_l \cdot \langle \mathbf{v}^l \rangle - \nabla \cdot (g_l D_l \nabla c_l) = 0$	(155)

Tableau 5 : Equations de conservation du milieu biphasique à l'échelle macroscopique, lorsqu'on suppose le solide fixe et que les termes de retrait à la solidification sont négligés.

Dans ces équations, la masse volumique est supposée constante, sauf dans le terme de source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans lequel on suppose une dépendance linéaire de la masse volumique du liquide par rapport à la température et à la concentration en soluté :

$$\rho_l = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_{ref}) - \beta_c (c_l - c_0)) \quad (156)$$

où ρ_0 est la masse volumique du liquide pour la température de référence T_{ref} et la concentration nominale de soluté c_0 . Les coefficients β_T et β_c sont respectivement les coefficients de dilatation volumique d'origine thermique et solutale : $\beta_T = -1/\rho_0 \cdot \partial \rho_l / \partial T$ et $\beta_c = -1/\rho_0 \cdot \partial \rho_l / \partial c_l$.

6.4 EXEMPLES D'APPLICATION

6.4.1 Validation de l'approche biphasique avec solide déformable

Le logiciel bidimensionnel R2SOL, dans lequel a été implanté la formulation biphasique avec solide déformable décrite précédemment, a été appliqué à un certain nombre de tests afin de valider l'approche développée (Le Corre & Bellet, 2004) :

- Un test de compression simple, pour lequel une solution analytique peut être calculée. Les résultats du logiciel sont en parfait accord avec cette solution, en termes de champs de vitesses et de pression interstitielle. Il est également intéressant de signaler que ceci reste vrai pour des fractions liquides proches des valeurs limite 0 et 1. Pour ces valeurs, les solutions montrent des différences faibles entre les champs de vitesse des deux phases : pour ces valeurs limite, l'écoulement tend à devenir monophasique. L'applicabilité du logiciel à tout l'intervalle de solidification est ainsi démontrée.
- Un test d'expansion d'anneau, provoquée par l'application d'une contrainte normale sur la face latérale interne de l'anneau. Ce test a également fait l'objet de calculs au laboratoire GPM2 (Martin et al., 1999). Les résultats, en termes de profil de fraction solide et de pression interstitielle de liquide en fonction du rayon dans la section à mi-hauteur et à un temps donné, sont en accord avec ceux obtenus par avec le modèle développé par Gebelin et al. dans le code de calcul Herezh (Gebelin, 2000 ; Favier et al., 2002).

6.4.2 Application à l'étude de la fin de solidification en coulée continue

La macroségrégation en coulée continue d'aciers a depuis toujours été un des problèmes majeurs dans le développement du procédé. Il est associé au phénomène de gonflement de la brame entre les rouleaux de soutien, qui provoque des mises en tension du cœur pâteux, propices à l'afflux de liquide ségrégué, c'est-à-dire chargé en éléments d'alliage (Miyazawa & Schwerdtfeger, 1981 ; Lesoult & Sella, 1990). Les sidérurgistes ont développé des procédés de contrôle de ce phénomène, soit en utilisant des actionneurs

thermiques (refroidissement local intensif de la peau) ou mécaniques (réduction « douce » de l'épaisseur du produit). Aujourd'hui, la compréhension et la maîtrise de ce défaut est toujours d'actualité, notamment pour les nuances d'aciers à haute limite d'élasticité, chargés en éléments d'alliage et donc sensibles à ce phénomène ainsi qu'à celui de rupture à chaud (qui résulte elle aussi d'une mise en tension du fond de la zone pâteuse). On conçoit donc qu'une modélisation biphasique puisse constituer un atout déterminant dans la compréhension de ces phénomènes.

Dans cette étude, menée en collaboration avec Victor Fachinotti (Bellet et al., 2004b), le calcul biphasique est mis en œuvre à partir d'une certaine distance au ménisque, pour laquelle un calcul de type milieu continu monophasé équivalent, tel que ceux présentés à la section 5.4, indique que la fraction solide est suffisamment élevée au cœur de la brame. On utilise alors le profil d'enthalpie obtenu pour initialiser un calcul biphasique selon la même méthode globale instationnaire (Figure 36). A la différence du premier calcul, la zone tampon se situe cette fois dans la partie courbe de la machine, vers la fin du refroidissement secondaire. Les conditions aux limites sont une vitesse d'extraction imposée à la face inférieure du maillage, comme pour le premier calcul, et une contrainte normale imposée sur la face supérieure, égale à la pression métallostatique locale.

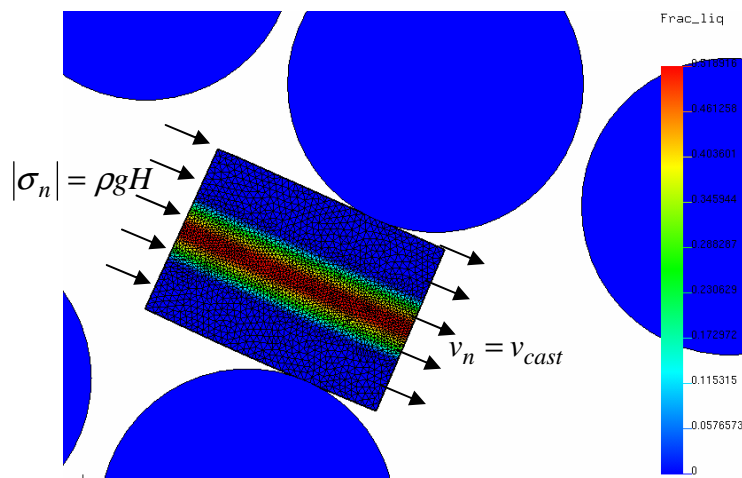


Figure 36. Initialisation d'un calcul biphasique en fin de solidification d'une brame de coulée continue. Ici, le calcul est initialisé à 15,50 m sous le ménisque. Sur la figure, on a tracé le champ de fraction liquide dans la zone tampon utilisée pour le calcul biphasique de type global instationnaire, ainsi que les conditions aux limites appliquées (H désigne ici la différence d'altitude avec le ménisque).

Conséquence du maillage mobile en coulée continue

L'application de la méthode de type globale instationnaire en biphasique nécessite d'effectuer un choix quant au champ de vitesse d'actualisation du maillage. En effet, à la différence du cas monophasé équivalent, dans lequel le champ de vitesse d'actualisation ne pouvait être que le champ de vitesse du matériau, \mathbf{v} , nous devons choisir dans le cas présent entre le champ de vitesse de mélange $\langle \mathbf{v} \rangle$ et l'un des champs de vitesse de la phase solide, \mathbf{v}_s ou $\langle \mathbf{v}^s \rangle$. On peut remarquer que dans la région solidifiée, c'est-à-dire la peau du produit, ce choix est neutre puisque les trois champs de vitesse sont confondus. En revanche, dans la partie pâteuse à cœur, nous avons choisi le champ de vitesse moyen intrinsèque \mathbf{v}_s , pour deux raisons. Tout d'abord, ce choix est plus pratique que celui de $\langle \mathbf{v}^s \rangle = g_s \mathbf{v}_s$ pour imposer des conditions aux limites en vitesse. D'autre part, nous verrons ci-après qu'il amène des simplifications dans les équations, à la différence du champ $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Les équations de conservation doivent en effet être modifiées pour tenir compte du champ de vitesse d'actualisation du maillage. Prenons l'exemple de la conservation de l'énergie. Dans la première intégrale de l'équation (141), la dérivée partielle de l'enthalpie par rapport au temps doit être discrétisée par rapport au temps. Pour pouvoir l'écrire en un nœud en fonction des valeurs de l'enthalpie en début et en fin de pas de temps en ce nœud, il est nécessaire de relier la dérivée partielle à la dérivée par rapport au maillage. Ceci est obtenu par la relation :

$$\frac{\partial_{msh}\langle h \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \nabla \langle h \rangle \cdot \mathbf{v}_{msh} \quad (157)$$

Ayant choisi $\mathbf{v}_{msh} = \mathbf{v}_s$, qui est issue de la résolution du problème mécanique, les équations de conservation de l'énergie (141) et du soluté (143) deviennent :

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \rho \rangle \left(\frac{\partial_{msh}\langle h \rangle}{\partial t} - \nabla \langle h \rangle \cdot \mathbf{v}_s \right) \varphi + \int_{\Omega} c_p \nabla T \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle \varphi + \int_{\Omega} \langle \lambda \rangle \nabla T \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \phi(T) \varphi = \\ - \int_{\Omega} L \left(\rho_l \nabla \cdot \langle \mathbf{v}' \rangle - f_l \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle \right) \varphi \end{aligned} \quad (158)$$

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial_{msh}\langle c \rangle}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega} \langle c \rangle \nabla \cdot \mathbf{v}_s \varphi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (g_l c_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)) \varphi - \int_{\partial\Omega} \varphi g_l D_l \nabla c_l \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot g_l D_l \nabla c_l = 0 \quad (159)$$

On pourra remarquer au passage qu'en prenant $\mathbf{v}_{msh} = \mathbf{v}_s$, les dérivées temporelles de (158) et (159) apparaissent comme les vitesses de variation de l'enthalpie et de la concentration moyennes en suivant le déplacement de la phase solide. En particulier, la dernière équation (159) est très proche de celle établie par Lesoult et al. (2003) qui ont développé une formulation lagrangienne de la modélisation de la macroségrégation dans le cas de la déformation d'une zone pâteuse cohérente. L'équation (143) conjuguée à (157) est simplement plus générale et permet toute flexibilité quant au choix de la vitesse de la grille de discrétisation.

Nous avons effectué un calcul préliminaire avec des données approximatives, en raison du fait notamment que la prise en compte de l'écrouissage n'est pas encore opérationnelle dans la loi viscoplastique compressible utilisée pour le squelette solide et également pour la coque d'acier complètement solidifiée. De ce fait, nous avons obtenu des gonflements de la brame entre les rouleaux largement surestimés, mais qui ont le mérite de bien illustrer les phénomènes mis en jeu. Comme on peut le voir sur la Figure 37, le calcul a pu être mené sur une distance coulée de 2,20 m, mettant en jeu 50000 éléments.

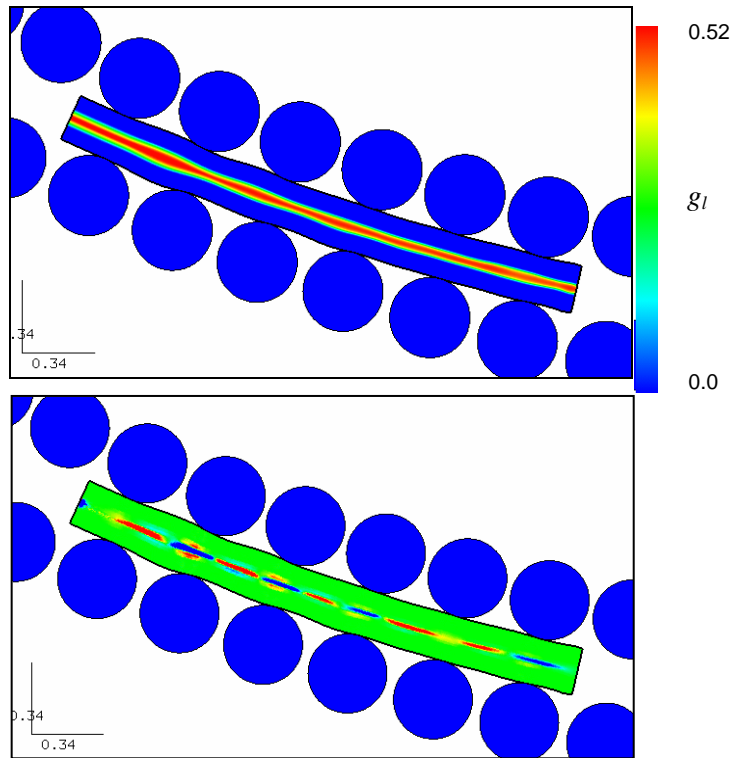


Figure 37. En haut, configuration à l'issue du calcul biphasique et distribution de fraction liquide. En bas, mise en évidence des régions où $\nabla \cdot \mathbf{v}_s$ est positive (en rouge) et négative (en bleu).

Sur cette figure, on a également mis en évidence les régions à divergence de champ de vitesse de la phase solide positive et négative. On constate que le squelette solide au cœur de la brame est soumis à des alternances de tension et de compression. Les premières ($\nabla \cdot \mathbf{v}_s > 0$) sont associées à un afflux local de phase liquide. Elles se trouvent dans les intervalles inter-rouleaux et sont causées par le gonflement de la brame entre les rouleaux. Les secondes ($\nabla \cdot \mathbf{v}_s < 0$) sont associées à une expulsion locale de la phase liquide et correspondent au passage entre les rouleaux.

Si on examine de plus près l'écoulement semi-solide, comme à la Figure 38, on constate que le champ de vitesse relative $\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s$ est assez complexe. Dans l'intervalle inter-rouleaux, le gonflement de la coque solide de la brame a deux conséquences : d'une part le cœur de la zone pâteuse est mis en tension, et d'autre part la périphérie de cette zone pâteuse est mise en compression, subissant sans doute l'effet de « poutre » entraînant la mise en compression du matériau à l'état solide au voisinage du front de solidification dans cette région. Il s'ensuit que le liquide est expulsé vers le cœur (champ de vitesse relative dirigé vers le centre). Au passage entre les rouleaux, le cœur de la zone pâteuse est mis en compression ($\nabla \cdot \mathbf{v}_s < 0$) tandis que la périphérie est mise en tension, par continuité avec la coque complètement solide au droit de chaque rouleau. L'écoulement relatif de liquide est alors dirigé du cœur vers la périphérie de la zone pâteuse.

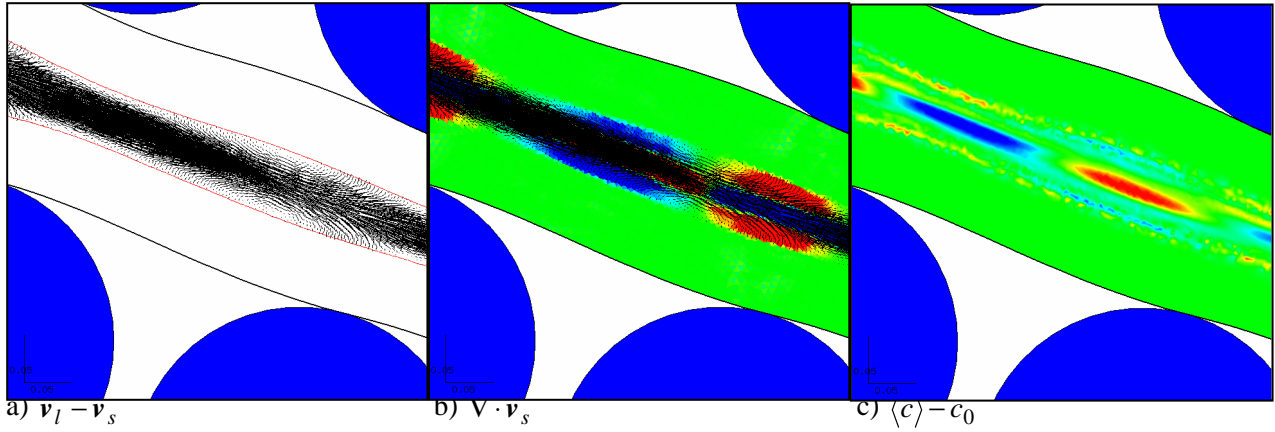


Figure 38. a) Courbe isotherme correspondant au solidus et champ de vitesse relative $\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s$. b) superposition des zones où $\nabla \cdot \mathbf{v}_s > 0$ (en rouge) et de celles où $\nabla \cdot \mathbf{v}_s < 0$ (en bleu). c) carte de macroségrégation en carbone : en rouge les régions à ségrégation positive, en bleu celles à ségrégation négative.

A chaque cage de rouleaux s'opère donc une redistribution du liquide interdendritique au sein de la zone pâteuse. Ce liquide enrichi en élément carbone va donc contribuer à créer une macroségrégation illustrée à la Figure 38c. On constate logiquement un effet de retard par rapport à la localisation des zones d'afflux et d'expulsion de liquide, qui correspond au transport général des deux phases à la vitesse de coulée. Sur cette même figure, on perçoit outre la ségrégation la plus importante créée au centre de la brame, une ségrégation associée en écho, de signe opposé. On constate que la finesse de maillage (visible à la Figure 36) est sans doute insuffisante pour capter correctement ce dernier phénomène.

Cette première application de la simulation biphasique à la coulée continue ne doit être considérée en l'état actuel que d'un point de vue qualitatif, en raison du manque de données fiables relatives au matériau. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas indiqué d'échelles sur les figures précédentes. Néanmoins, elle révèle bien le potentiel de la méthode.

6.4.3 Approximation à solide fixe : étude de la macroségrégation en coulée de lingots

Cette thématique est celle des actuels travaux de thèse de Weitao Liu et Sylvain Gouttebroze. Pour valider l'implantation et tester le couplage des différentes équations de conservation dans R2SOL et THERCAST®, nous nous sommes référés aux résultats expérimentaux de Hebditch & Hunt (1974), obtenus lors de la solidification de lingots parallélépipédiques de deux alliages binaires composés de plomb et d'étain (Pb-48wt%Sn et Sn-5wt%Pb, Figure 39). Ces résultats expérimentaux ont déjà servi de support à un exercice de benchmark mettant en jeu un modèle de type volumes finis (SOLID, développé à l'Ecole des Mines de Nancy par Hervé Combeau) et un modèle d'éléments finis (CALCOSOFT®, développé par Michel Rappaz et al. à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) (Ahmad et al., 1997).

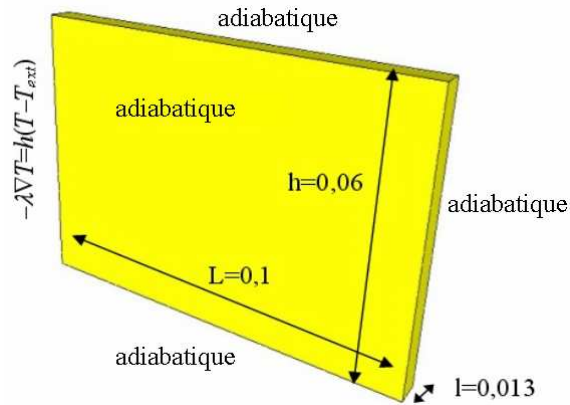


Figure 39. Description du test de Hebditch & Hunt. Les données thermophysiques des alliages peuvent être trouvées dans (Liu, 2005).

Le modèle biphasique décrit plus haut a été utilisé, en supposant la phase solide fixe, ce qui correspond à une croissance colonnaire à partir de la face non isolée du lingot. Les masses volumiques du plomb et de l'étain étant très différentes, la convection solutale est significative ; elle se cumule à la convection d'origine thermique dans le cas de l'alliage étain-plomb, tandis qu'elle s'y oppose pour le plomb-étain. Les deux cas donnent lieu à la formation de canaux ségrégés, phénomène bien identifié en solidification et qui a motivé le développement de méthodes de raffinement de maillage dans nos travaux. Afin d'adapter le maillage dans ces régions, où concentrations en éléments d'alliage et en fraction liquide varient rapidement, nous avons développé des procédures de pilotage du mailleur automatique développé au CEMEF. Connaissant les distributions de fraction liquide et de concentration, nous pouvons déterminer localement, sur la base de quelques règles simples, une taille de maille locale. Au cours du calcul, lorsque la taille de maille courante est trop éloignée de cette taille souhaitée, un remaillage est déclenché, dans lequel on demande de respecter localement cette taille visée. De plus, nous pouvons prescrire au mailleur des directions et une intensité d'anisotropie pour le nouveau maillage, afin de raffiner dans la direction des gradients tout en minimisant le nombre d'éléments finis mis en jeu (Bellet et al., 2004a ; Gouttebroze et al., 2005).

Nous présentons à la Figure 40 quelques résultats obtenus avec R2SOL. En utilisant différents maillages de taille variable, on constate - sans surprise - que la capture des canaux ségrégés nécessite un maillage fin. En outre, le remaillage dynamique adapté permet de représenter les phénomènes avec plus de précision, ce qu'illustre en détail la Figure 41. D'un point de vue quantitatif, nous montrons à la Figure 42 une comparaison des profils de concentration en plomb dans quatre sections horizontales du lingot, aux cotes 5, 25, 35 et 55 mm. On constate que l'accord est globalement très bon, à l'exception toutefois de la section inférieure pour laquelle l'ensemble des simulations prédit une ségrégation moins forte qu'en réalité. Des résultats similaires ont été obtenus sur l'alliage Pb-48wt%Sn (Liu, 2005). L'influence du couplage éventuel entre les résolutions des différentes équations de conservation (cf. section 6.2.11) a également été étudiée. Il apparaît que l'utilisation du remaillage adapté et le contrôle du pas de temps permettent de s'affranchir du couplage fort entre ces résolutions.

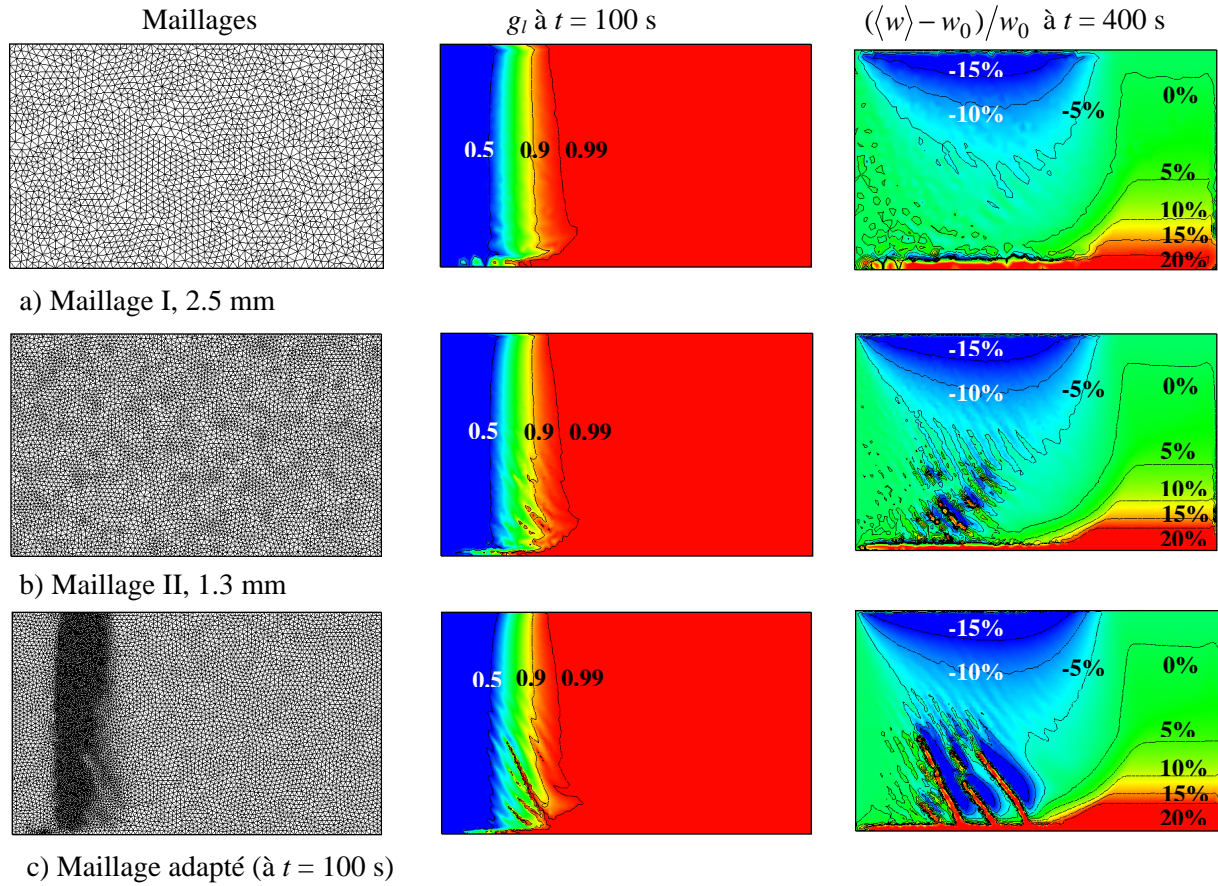


Figure 40. Etude de la solidification d'un alliage Sn-5wt%Pb avec R2SOL, en utilisant différentes discrétisations spatiales : deux maillages fixes et un maillage adapté dynamiquement sur la dernière ligne.

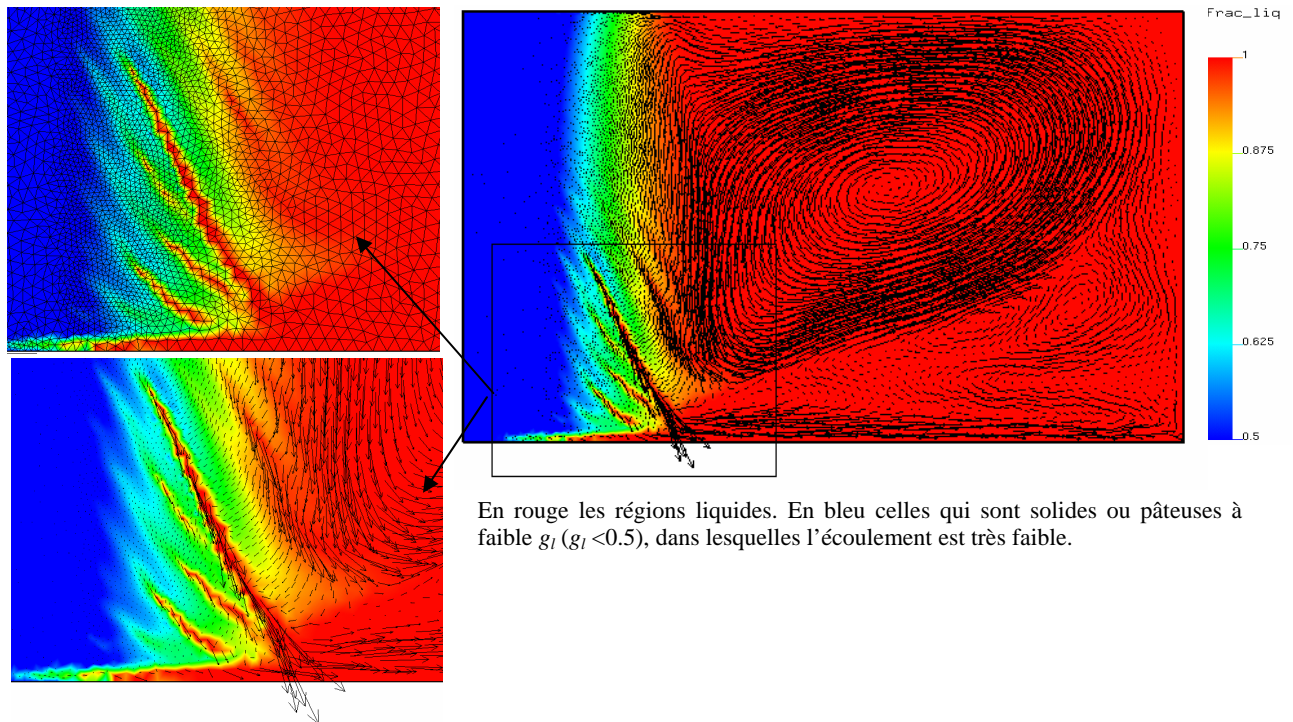


Figure 41. Illustration de l'apport du remaillage dynamique adapté en présence de canaux ségrégés. Dans une région du lingot où la température est pourtant homogène, ces régions sont maintenues à l'état liquide en raison de leur forte concentration en élément d'alliage (ici en Pb).

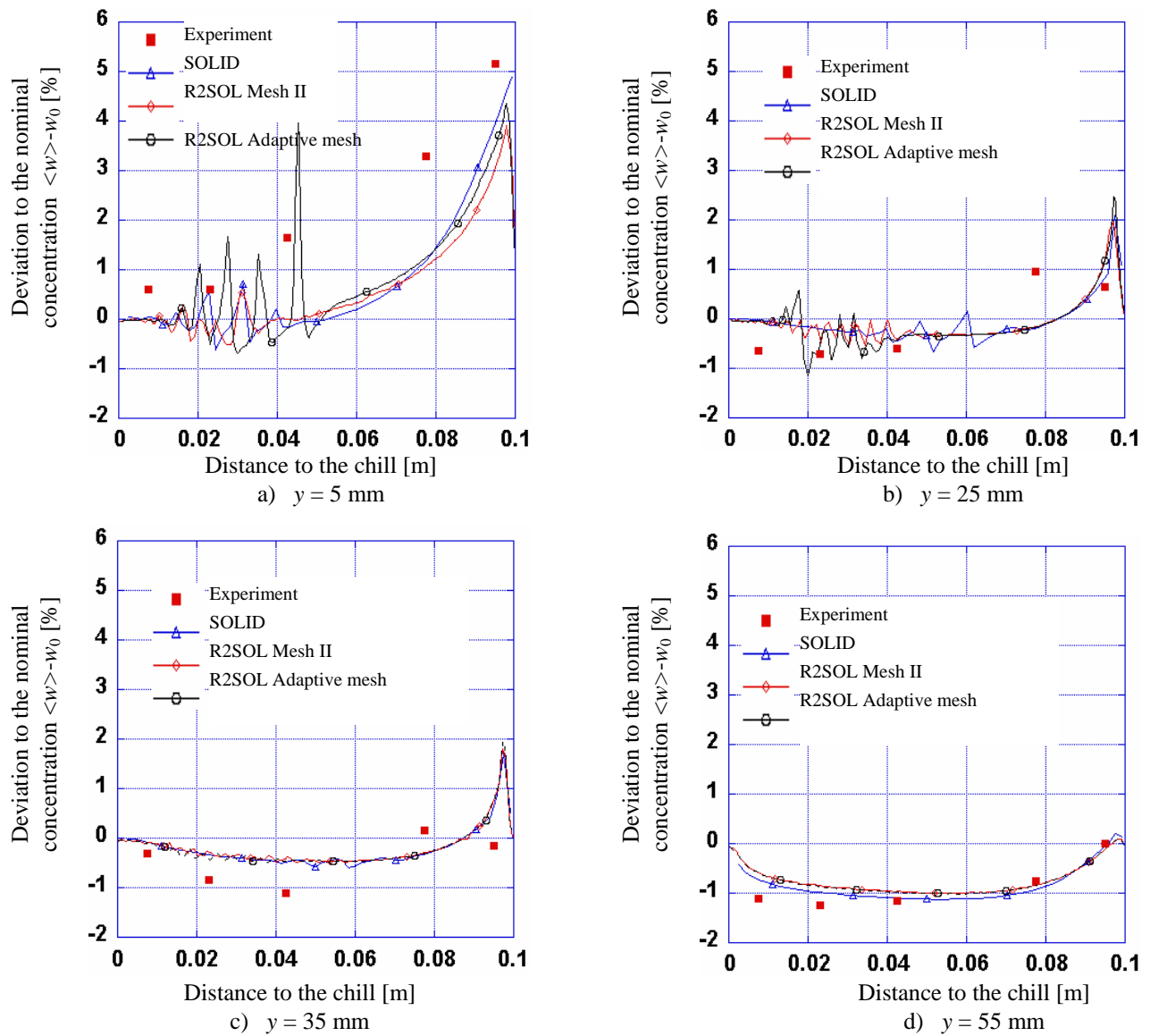


Figure 42. Test de Hebditch & Hunt, alliage Sn-5wt%Pb. Profil de concentration en plomb dans les quatre coupes horizontales du lingot. Les résultats obtenus avec le code R2SOL (avec un maillage uniforme - Mesh II - et avec un maillage adapté dynamiquement) sont comparés aux résultats expérimentaux et aux résultats obtenus avec le code de volumes finis SOLID.

La Figure 43 présente des résultats obtenus en simulation tridimensionnelle avec THERCAST® dans le cas de l'alliage Pb-48wt%Sn. La Figure 44 montre une première application à un lingot de plus grande taille, dont une demi-section est calculée ici en approximation plane avec une seule couche d'éléments tétraèdres dans la troisième direction. Cette figure illustre bien les capacités d'adaptation du remaillage anisotrope : maillage anisotrope dans les couches limites et isotrope dans les régions où l'écoulement est plus complexe. Pour traiter des cas industriels tridimensionnels, le remaillage adapté et l'utilisation du code en parallèle s'avèrent indispensables.

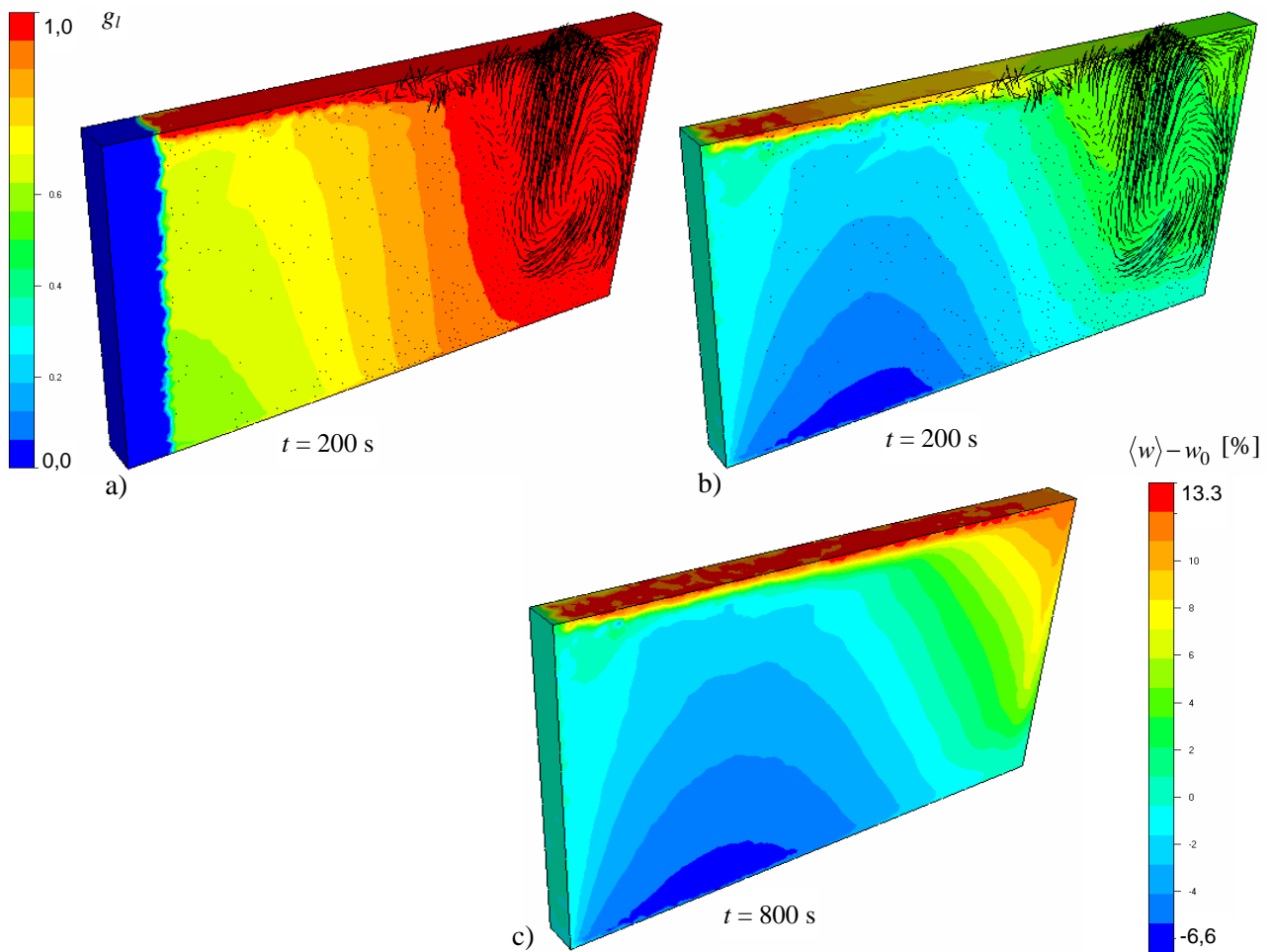


Figure 43. Simulation tridimensionnelle du test de Hebditch & Hunt (alliage Pb-48wt%Sn) avec THERCAST®. a) distribution de fraction liquide montrant l'avancée de la solidification. Le tracé des vecteurs vitesse indique une convection dans le sens des aiguilles d'une montre, cause du canal restant liquide en haut de l'éprouvette (chute de la température de fusion dû à l'enrichissement en étain). b) carte du titre massique moyen en étain au même instant. c) carte du titre massique moyen en étain après solidification totale.

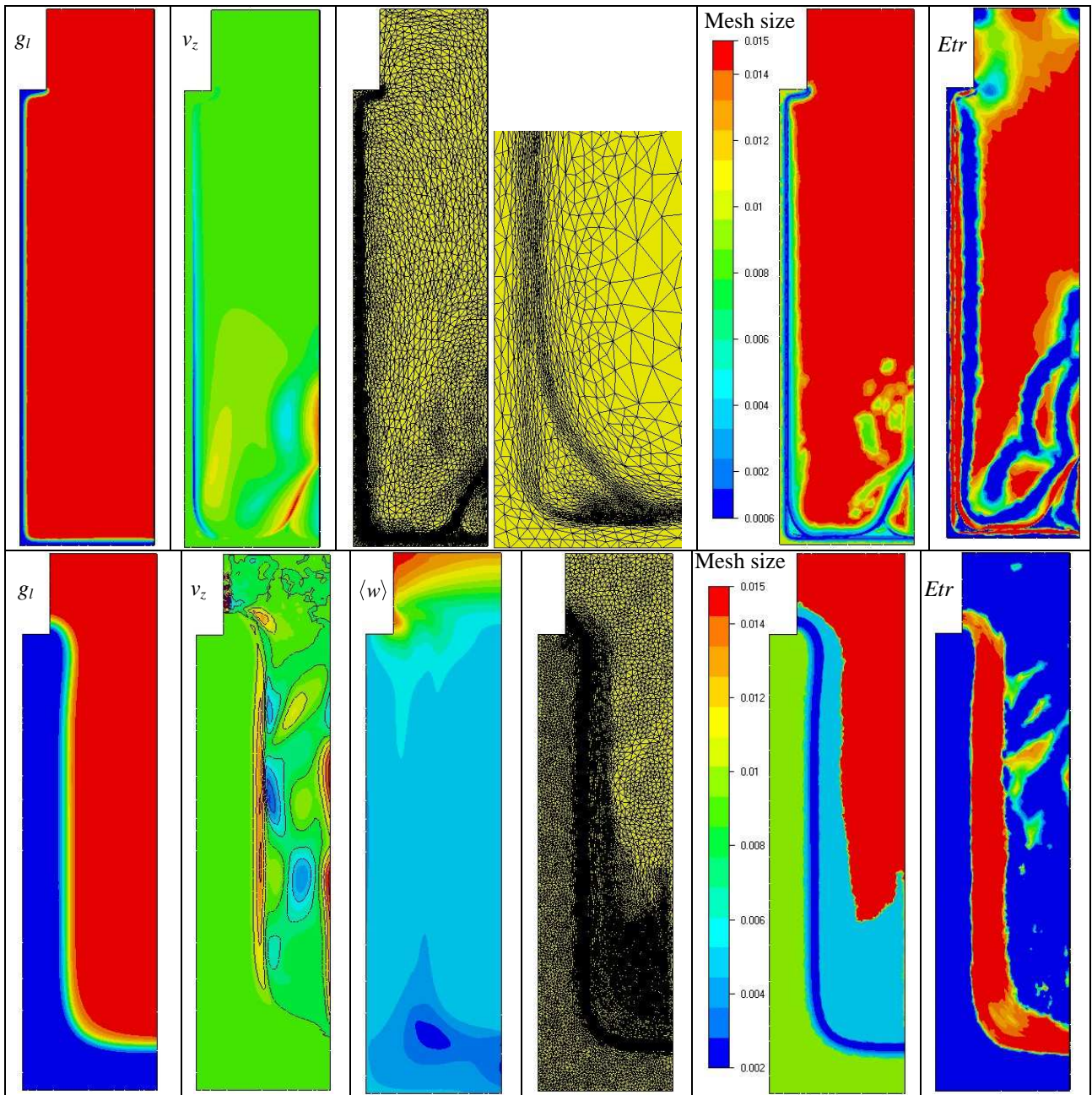


Figure 44. Etude de la solidification d'un lingot de hauteur 2 m. Approche pseudo-3D (une seule couche de tétraèdres dans la 3ème direction), alliage binaire Fe-0.38wt%C. Première ligne : au temps 100 s, fraction liquide, vitesse verticale (min -87 mm/s, max 77 mm/s), maillage et zoom sur le coin inférieure gauche, carte des tailles de maille et variable E_{tr} indiquant la désorientation locale du vecteur vitesse (indicateur pilotant le degré d'anisotropie du maillage dans la zone liquide). Seconde ligne : au temps 2000 s, fraction liquide, vitesse verticale (min -2.5 mm/s, max 4 mm/s), titre massique moyen en carbone $\langle w \rangle$ (min 0.372 %, max 0.411 %), maillage, carte des tailles de maille et indicateur E_{tr} .

7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Pour les thématiques poudres et polymères, les principales conclusions ont été émises dans les sections 1 et 2. Nous n’y revenons pas ici.

Concernant l’approche thermomécanique de la solidification, une des questions centrales qui nous a interpellé au cours de nos travaux – et continuera sans doute de le faire dans l’avenir – est la suivante. Quel type de modélisation de la zone pâteuse en solidification, et pour quels objectifs ? En effet, le lecteur aura remarqué une certaine progression au cours de l’exposé. Dans une première approche, où l’on vise surtout une bonne simulation des distorsions (« gaps ») et des contraintes résiduelles affectant une pièce de fonderie, la zone pâteuse est assimilée à un milieu continu homogénéisé équivalent, dans lequel on ne distingue pas les champs de vitesse de la phase liquide et de la phase solide. On suppose alors que ce milieu satisfait une loi de comportement de type fluide non newtonien généralisé (viscoplasticité de Norton-Hoff). Cette approche simple est valide dans une certaine mesure, comme l’attestent d’une part les travaux que nous avons pu mener sur la rhéologie des alliages d’aluminium (cf. section 6.1.1), d’autre part les essais d’indentation réalisés précédemment au CEMEF (Vicente-Hernandez, 1994), et enfin, de manière plus pragmatique, les résultats quantitatifs que nous avons enregistrés en mettant en œuvre ce que nous avons appelé le modèle « hybride » de comportement (viscoplastique / élasto-viscoplastique). Néanmoins, les limitations sont évidentes quand il s’agit de modéliser l’écoulement de la phase liquide à travers le réseau dendritique constitué par la phase solide, par exemple pour aborder la simulation de la formation des macroségrégations en éléments d’alliage. Nous avons alors été conduits à envisager le caractère clairement diphasique de la zone pâteuse. Dans un premier temps, nous avons fait l’hypothèse d’une phase solide statique et nous avons appliqué une première fois la méthode de prise de moyenne spatiale sur un volume élémentaire représentatif du milieu diphasique. Notre apport dans ce domaine s’est essentiellement concentré sur la mise en œuvre numérique de la méthode dans le cadre d’une résolution par éléments finis : étude des stratégies de couplage, étude des schémas numériques pour résoudre les équations d’advection-diffusion. Là encore, d’un point de vue mécanique, cette approche se heurte à des limitations importantes. D’une part, l’hypothèse d’un milieu solide constitué en squelette cohérent indéformable est très contestable. D’autre part, cette approche exclut tout calcul de déformations et de contraintes dans les parties complètement solidifiées de la pièce coulée. A ce stade et si l’on en reste là, on est alors confronté à une sorte de « Yalta » du monde de la simulation numérique en solidification. D’un côté, les approches privilégiant clairement la mécanique des fluides, dans lesquelles la phase solide est en quelque sorte ignorée du point de vue mécanique puisqu’elle n’apparaît que sous la forme d’une perméabilité associée au squelette dendritique (cette perméabilité devenant asymptotiquement nulle dans les régions totalement solides). De l’autre, les approches privilégiant la mécanique du solide (calculs dénommés de type « stress-strain » dans la littérature), dans lesquelles le caractère réellement diphasique de la zone pâteuse est ignoré en négligeant tout écoulement différentiel entre liquide et solide. La chute de ce Yalta, encore en vigueur dans toute la communauté de la simulation des procédés de solidification, ne pourra venir que du développement de modélisations réellement diphasiques, c’est-à-dire celles qui satisfont les conditions suivantes :

- inclure un modèle rhéologique du milieu solide lorsque celui-ci est « cohérent » ;
- être applicable au contexte de la sédimentation (transport d’une phase solide indéformable dans un écoulement de liquide) ;
- pouvoir être prolongée vers les états complètement liquide d’une part, et complètement solide d’autre part.

Comme nous l’avons signalé en début de section 6, cet effort est déjà perceptible dans la communauté scientifique et nous y participons activement. Ainsi, les résultats que nous avons pu obtenir en appliquant notre formulation diphasique à l’étude de la fin de solidification en refroidissement secondaire de coulée continue nous semblent très prometteurs. Cependant, il est évident que vue l’ampleur des questions soulevées (représentativité des équations, grande complexité des modèles rhéologiques, difficultés certaines

d'identification d'un grand nombre de paramètres, défi de la mise en œuvre numérique) cette évolution va s'étaler sur quelques années. Pour notre part, nous comptons décomposer ces développements de la manière suivante :

- **Unification des calculs « stress-strain » et mécanique des fluides.** Il s'agit de rendre compatible la résolution de type mécanique des fluides – c'est-à-dire avec phase solide fixe dans la zone pâteuse – avec le calcul des déformations et contraintes dans les parties complètement solides. L'objectif est de synthétiser en une simulation unique les calculs des déformations, des contraintes et de la convection thermo-solutale donnant lieu aux macroségrégations. Pour cela, nous comptons compléter, à chaque incrément de temps, l'actuel calcul de type « stress-strain », effectué avec une viscosité liquide arbitrairement élevée (de l'ordre de 1 Pa s), par un second calcul dont les seuls degrés de liberté concerneront le domaine liquide et pâteux, dans lequel on effectuera un calcul de mécanique des fluides pour calculer les mouvements de convection thermo-solutale avec la viscosité nominale du liquide et une hypothèse de phase solide fixe. Cette résolution étant linéaire, elle sera effectuée à un coût tout à fait marginal, représentant un coût de calcul comparable à celui d'une itération du problème non linéaire de type « stress-strain ». Des travaux sont déjà en cours pour développer cette approche unifiée.

Un terrain d'application privilégié pour cette modélisation globale devrait être la lingotière de coulée continue. Nous avons lancé récemment une étude (travaux de thèse de Marc Henri) visant à la **modélisation de la solidification en lingotière de coulée continue**. Il s'agit d'appliquer nos modèles numériques à l'étude de la solidification de la première peau. Pour ce faire, il est absolument nécessaire de modéliser l'écoulement du liquide à cause d'une part de l'impact du jet en sortie de busette sur la paroi solidifiée, et d'autre part du transport d'énergie associé aux recirculations de métal liquide en lingotière. Pour traiter la turbulence de cet écoulement tridimensionnel, nous allons implanter dans THERCAST® la résolution d'un modèle de turbulence à deux équations, de type $k-\varepsilon$, modèle sur lequel nous avons déjà travaillé au cours de la thèse de Laurence Gaston (Gaston et al., 2000, section 5.1.1 du présent document). En effet, vue la dimension du domaine de calcul (demi-lingotière en 3D, soit environ $0,1 \times 2 \times 1 \text{ m}^3$), une simulation de type LES (Large Eddy Simulation) reste en pratique hors de portée car nécessitant des tailles de maille trop faibles. Outre la turbulence, les enjeux de cette simulation résident dans le couplage fluide-structure, soit entre l'écoulement turbulent et la fine peau solidifiée au contact de la lingotière en cuivre. Dans ce contexte, la méthode ALE devrait constituer un atout très intéressant.

- **Etendre le domaine d'application de la formulation réellement diphasique.** Nous avons montré à la section 6.4.2 que l'application de cette formulation à la modélisation de la fin de solidification en coulée continue était très prometteuse : elle laisse espérer une modélisation prédictive de la formation des macroségrégations centrales en coulée continue d'aciers. Si l'on ose poursuivre avec l'image du Yalta de la solidification, l'objectif est ici « la chute du mur ». Notre objectif à terme est de traiter la zone pâteuse non cohérente (aspects sédimentation) et la zone pâteuse cohérente (aspects phase solide déformable) et ceci aussi bien en coulée en moule qu'en coulée continue. De ce point de vue, les travaux menés par Steven Le Corre et Victor Fachinotti, visant à modéliser la thermomécanique de la zone pâteuse cohérente dans le contexte de la coulée continue des aciers, sont un début et demandent à être poursuivis et étendus aux modélisations tridimensionnelles. Dans ce contexte, les capacités de pilotage du remaillage dynamique anisotrope, déjà mises en place dans le cadre d'une première approche de la modélisation des macroségrégations, devraient jouer un rôle déterminant.
- **Identifier le comportement rhéologique à l'état semi-solide cohérent.** L'objectif est de remettre en question les modèles simples actuellement utilisés dans notre formulation diphasique, principalement le modèle rhéologique de la phase solide (viscoplasticité compressible). Cela suppose bien sûr des essais rhéologiques, pratiqués en condition de solidification, sur machine Gleeble par exemple. Une procédure d'identification permettrait de déterminer les paramètres de

modèles rhéologiques existants (modèles simples tels que celui implanté aujourd'hui ou modèles plus sophistiqués de la littérature comme celui suggéré par les travaux de Ludwig (2004)), voire de suggérer des modèles nouveaux. Il serait aussi très intéressant de comparer cette approche de rhéologie classique avec l'approche par « homogénéisation numérique directe ». Cette dernière consiste à associer la modélisation par éléments finis aux petites échelles et le recalage de modèle. Concrètement, il s'agit de modéliser par éléments finis la déformation du réseau dendritique à l'échelle du v.e.r. Différents calculs, effectués pour diverses conditions aux limites appliquées aux frontières du v.e.r., constituent alors une base de données sur laquelle on pourra procéder à une identification de modèle, par analyse inverse. En comparant les résultats obtenus entre le calcul direct et le calcul avec comportement homogénéisé, ceci permettra de justifier, critiquer, améliorer la forme actuelle des lois de comportement de la phase solide, homogénéisées à l'échelle du v.e.r. Une approche similaire peut être envisagée pour les lois de type Darcy qui gouvernent l'écoulement du liquide en milieu perméable. Compte tenu des multiples composantes d'un tel projet (expérimentation, identification, discrétisation, modélisation), celui-ci doit être formulé dans un cadre coopératif, à l'intérieur du CEMEF, mais aussi à l'extérieur.

Par ailleurs, la méthode de changement d'échelle par prise de moyenne spatiale rencontre ses propres limitations dans le domaine de la **prédiction de la microstructure** obtenue en solidification. De ce point de vue, une approche pertinente nous semble être celle fournie par le couplage des méthodes d'éléments finis et les méthodes d'automates cellulaires, méthodes dites « CA-FE » (Gandin & Rappaz, 1994). En effet, ces dernières permettent de modéliser et de suivre la croissance et le transport de chaque grain, et donc la formation de la microstructure. En collaboration avec Charles-André Gandin, au CEMEF depuis octobre 2004, nous travaillons à l'implantation de ces couplages dans nos modèles d'éléments finis (post-doc de Gildas Guillemot, travaux de thèse d'Olivier Marcou, dans le cadre de deux projets européens dirigés par l'ESA, agence spatiale européenne : CETSOL et NEQUISOL). Cependant, même si ces méthodes sont déjà opérationnelles sur de petites pièces (telles des aubes de turbine en solidification dirigée), on ne peut espérer les appliquer à la coulée continue ou à des pièces massives comportant des milliers de milliards de grains, avant plusieurs années. Il reste donc à inventer une méthode de changement d'échelle qui puisse être à même de calculer l'état d'une microstructure représentative du v.e.r. local, le plus difficile consistant à tenir compte des phénomènes de transport d'une population de grains, inhérents à la solidification équiaxe.

Du point de vue prédiction des défauts en cours de solidification, nous avons entrepris une étude visant à évaluer les différents **critères de rupture à chaud** de la littérature. La rupture à chaud, ou crique à chaud (« hot tear » en anglais) est un défaut majeur en solidification, qui conduit au rebut de nombreuses pièces ou demi-produits. Elle correspond à l'ouverture de criques en fond de zone pâteuse, c'est-à-dire dans les régions à haute fraction de solide, lorsque ces régions sont soumises à des déformations favorisant la mise en traction des films liquides résiduels et/ou des ponts solides établis entre les dendrites. L'ouverture de ces criques donne lieu soit à des filets ségrégés, par appel de liquide fortement chargé en éléments d'alliage, soit carrément à des fissures au sein du produit solidifié lorsque la pression interstitielle de liquide est insuffisante pour compenser leur ouverture. Actuellement deux types de critères radicalement différents ont été proposés. En premier lieu des critères d'inspiration mécanique du solide tels que celui de Prokhorov (1962), dont le principe consiste à comparer la déformation plastique accumulée par le squelette solide de la zone pâteuse entre deux fractions solides caractéristiques (typiquement la fraction solide dite de cohérence, aux alentours de 0.7 et une fraction proche de la fin de solidification) à une déformation critique caractérisant la ductilité intrinsèque du matériau. Ces critères ignorent totalement l'écoulement de liquide dans la zone pâteuse. A l'inverse, les critères d'inspiration mécanique des fluides supposent que la rupture survient en cas de déficit d'alimentation de liquide à travers la zone pâteuse (Feurer, 1976 puis Rappaz et al., 1999, qui prennent en compte dans le critère la déformation appliquée au milieu semi-solide). Ces critères sont des critères d'amorçage de la fissuration et on peut noter des tentatives pour compléter l'approche en vue de prédire propagation des fissures et rupture (Braccini, 2000 ; Suyitno et al., 2002) mais le sujet reste largement ouvert à ce jour. Dans ce contexte, les travaux de thèse d'Olivier Cerri ont pour objectif de concevoir des essais de criquabilité sur aciers, de réaliser leur mise en œuvre sur l'installation de coulée sous atmosphère contrôlée du CEMEF (en cours d'achèvement) et d'effectuer la modélisation thermomécanique

de ces essais. L'intégration des différents critères de la littérature dans le code THERCAST® permettra d'évaluer leur capacité à prédire correctement l'occurrence de la rupture à chaud. A terme, l'utilisation de la formulation diphasique avec solide déformable devrait se révéler fort utile dans ce domaine et l'objectif pourrait être alors la formulation d'un nouveau critère original.

Les perspectives évoquées précédemment devraient permettre d'enrichir les logiciels de solidification développés au CEMEF, R2SOL et THERCAST®. Ces améliorations auront donc un impact sur la modélisation des divers procédés de solidification en moules ou en continu.

Les autres procédés qui nous intéressent vivement sont **les procédés de soudage**, en particulier le soudage à l'arc avec apport de matière. Lancés en octobre 2004 en partenariat avec Transvalor, les travaux de thèse de Makhlof Hamide visent au développement d'un logiciel de simulation ayant pour premiers objectifs la prédiction de la thermo-mécanique des pièces assemblées, en tenant compte des transformations de phase à l'état solide rencontrées au chauffage et au refroidissement des aciers. Cet effort devrait être poursuivi par d'autres études plus focalisées sur l'hydrodynamique de la zone fondue (effet Marangoni, pour lequel nous avons effectué des calculs préliminaires) et l'étude de la soudabilité (fissuration à froid et à chaud). Le soudage est évidemment un domaine dans lequel nous pouvons capitaliser l'expérience accumulée lors de la modélisation des procédés de solidification. Ainsi la modélisation des écoulements thermo-solutaux devrait se révéler très intéressante (étude de la dilution en soudage mono et multi-passe, étude de l'influence de la ségrégation de certains éléments d'alliage sur les propriétés physiques telles que la tension de surface). Il en est de même de l'application de méthodes numériques comme la formulation ALE et le remaillage dynamique, absolument essentiels dans ce domaine. Parallèlement à cette étude à dominante numérique, nous avons décidé d'acquérir un banc de soudage à l'arc dans le but de procéder à des essais instrumentés de soudage, pour valider nos modèles.

En résumé, nous affirmerons modestement que le chemin est encore long pour parvenir à des modèles prédictifs pour des applications industrielles dans le domaine éminemment complexe de la thermomécanique des procédés de solidification. Mais n'est-ce pas cette complexité qui rend l'aventure toujours passionnante ?

8 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- M. Abouaf, Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées. Approche par la mécanique des milieux continus, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble (1985).
- M. Abouaf, J.-L. Chenot, G. Raïsson, P. Bauduin, Finite element simulation of hot isostatic pressing of metal powders, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 25 (1988) 191-212.
- N. Ahmad, Numerical simulation of transport processes in multicomponent systems related to solidification problems, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1995).
- N. Ahmad, H. Combeau, J.-L. Desbiolles, T. Jalanti, G. Lesoult, M. Rappaz, C. Stomp, Numerical Simulation of Macrosegregation: a Comparison between Finite Volume Method and Finite Element Method Predictions and a Confrontation with Experiments, *Metall. and Mat. Trans. A* 29 (1997) 617-630.
- C. Aliaga, Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2000).
- D. N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, A stable finite element for Stokes equation, *Calcolo* 21 (1984) 337-352.
- J.-L. Auriault, H. I. Ene, Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier, *Int. J. Heat Mass Transfer* 37 (1994) 2885-2892.
- C. Bahloul-Massip, Etude numérique des phénomènes thermomécaniques pour la simulation tridimensionnelle du remplissage des moules de fonderie, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2000).
- M. Barkhudarov, H. You, J. Ortega, J. Beech, S. B. Chin, D. H. Kirkwood, Experimental validation and development of Flow-3D for casting problems, *Proc. 6th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1993) 421-434.
- S. Batkam, Thermique multi-domaines en simulation numérique du remplissage 3D, Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris (2002).
- S. Batkam, J. Bruchon, T. Coupez, A space time discontinuous Galerkin method for convection and diffusion in injection moulding, *Int. Journal of Forming Processes* 7 (2004) 11-33.
- F. Bay, J. Barlier, Y. Chastel, M. Bobadilla, G. Lovato, Numerical modelling of extrusion for a semi-solid alloy. Application to rheological parameters identification in Sn-Pb alloys, *Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1998) 941-948.
- M. Bellet, C. Corsini, D. Assaker, P. Mercier, P. Wouters, A numerical model of the extrusion blow - molding process, *J. Reinforced Plastics and Composites* 12 (1993) 498 – 505.
- M. Bellet, F. Decultieux, M. Ménaï, F. Bay, C. Levallant, J.-L. Chenot, P. Schmidt, I. Svensson, Thermomechanics of the cooling stage in casting processes: 3D finite element analysis and experimental validation, *Met. Trans. B* 27 (1996) 81 – 100.
- M. Bellet, A. Rodriguez-Villa, J.-F. Agassant, Finite element and automatic remeshing methods for the simulation of complex blow molded polymer components, in: *Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications Proc. NUMIFORM'98*, 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Enschede, Pays-Bas, 22-25 juin 1998, J. Huétink, F. P. T. Baaijens (eds.), Balkema, Rotterdam (1998) 489-494.
- M. Bellet, M.-H. Vantal, B. Monasse, Thermal effects in the numerical simulation of the thermoforming of multilayered polymer sheets, *Int. Polymer Processing* 13 (1998) 299-308.
- M. Bellet, Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation. Application to metal powder hot compaction, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 175 (1999) 19-40.
- M. Bellet, O. Jaouen, Finite element approach of thermomechanics of solidification processes, *Proc. Int. Conf. On Cutting Edge of Computer Simulation of Solidification and Casting*, Osaka (Japon), novembre 1999, I. Ohnaka & H. Yasuda (eds.), The Iron and Steel Institute of Japan (ISIJ), Tokyo (1999) 173-190.
- M. Bellet, Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow, *Comm. Num. Meth. Engng.* 17 (2001) 563-579.

- M. Bellet, S. Moto Mpong, Determination of the constitutive equation parameters of a thixotropic Al alloy and FEM modelling of the thixoforming process, in *Simulation of Material Processing: Theory, Methods and Applications*, Proc. NUMIFORM'2001, 7th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Toyohashi, Japon, 18-20 juin 2001, K. Mori (ed.), Balkema, Lisse, Pays-Bas (2001) 1087-1092.
- M. Bellet, B. Monasse, J.-F. Agassant, Simulation numérique des procédés de soufflage de polymères, *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM, article AM3705 (2002) 1-23.
- M. Bellet, V. D. Fachinotti, ALE method for solidification modelling, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* 193 (2004) 4355-4381.
- M. Bellet, A. Heinrich, A two-dimensional finite element thermomechanical approach to a global stress-strain analysis of steel continuous casting, *ISIJ International* 44 (2004) 1686-1695.
- M. Bellet, V. D. Fachinotti, S. Gouttebroze, W. Liu, H. Combeau, A 3D-FEM model solving thermomechanics and macrosegregation in binary alloys solidification, Proc. Symposium on Solidification Processes and Microstructures, in Honor of Wilfried Kurz, TMS Annual Meeting, Charlotte (NC, USA) mars 2004, M. Rappaz, C. Beckermann & R. Trivedi (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (2004) 41-46.
- M. Bellet, S. Le Corre, V.D. Fachinotti, A 2-phase finite element model to study concurrent fluid flow and solid deformation occurring in mushy zones during the solidification of metallic alloys, Proc. S2P, Int. Conf. on Semi-Solid Processing of Alloys and Composites, Limassol, Chypre, 21-23 septembre 2004, D. Apelian & A. Alexandrou (eds.), CDROM publié par l'Université de Chypre et le Worcester Polytechnic Institute (USA), 9 pages (2004)
- M. Bellet, E. Saez, O. Jaouen, T. Coupez, A 3D-FEM solver for non steady state Navier-Stokes equations with free surface. Application to mold filling simulation in casting processes, Proc. Symposium on Multiphase Phenomena and CFD Modelling and Simulation in Materials Processes, TMS Annual Meeting, Charlotte (NC, USA) mars 2004, L. Nastac & B. Q. Li (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (2004) 209-218.
- M. Bellet, O. Jaouen, I. Poitault, An ALE-FEM Approach to the Thermomechanics of Solidification Processes with Application to the Prediction of Pipe Shrinkage, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow* 15 (2005) 120-142.
- W. D. Bennon, F. P. Incropera, A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems – I. Model formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 2161-2170.
- D. Bernard, L. Salvo, O. Nielsen, Permeability calculations on real Al-Cu microstructures assessed by 3D microtomography, Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D. M. Stefanescu, J. A. Warren, M. R. Jolly & M. J. M. Krane (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (2003) 175-182.
- A. Bourg, A. Latrobe, P. Laty, G. Kreziak, C. Rigaut, Predicting the mold filling time with Simulor, Proc. NUMIFORM'92 Int. Conf. on Numerical Modelling of Forming Processes, J.-L. Chenot, R. D. Wood, O. C. Zienkiewicz (eds.), Balkema, Rotterdam (1992) 777-785.
- P. Bousquet-Melou, B. Goyeau, M. Quintard, F. Fichot, D. Gobin, Average momentum equation for interdendritic flow in a solidifying columnar mushy zone, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45 (2002) 3651-3665.
- M. Braccini, Optimisation des pièces moulées : étude des phénomènes de fissuration à chaud dans les alliages Al-Cu, Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble (2000).
- J.-J. Brioist, Un modèle thermomécanique du refroidissement des pièces moulées, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1995).
- A. N. Brooks, T. J. R. Hughes, Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 32, (1982) 199-259.
- C. Champin, M. Bellet, F. M. Schmidt, J.-F. Agassant, Y. Le Maoult, 3D finite element modeling of the stretch blow molding process, Proc. PPS-20, 20th Annual Meeting of the Polymer Processing Society, Akron (Ohio, USA), 20-24 juin 2004, CDROM, The University of Akron (2004) 15 pages.
- C. Champin, M. Bellet, F. M. Schmidt, J.-F. Agassant, Y. Le Maoult, 3D finite element modeling of the blow molding process, Proc. ESAFORM 2005 8th Conf. on Material Forming, Cluj-Napoca (Roumanie), avril 2005, vol. 2, The Romanian Academy Publishing House, Bucarest (2005) 905-908.
- J.-L. Chenot, M. Bellet, The ALE method for the numerical simulation of material forming processes, Proc. NUMIFORM'95, 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Cornell

- University, Ithaca (NY, USA), 18-21 juin 1995, S. F. Shen & P. R. Dawson (eds.), Balkema, Rotterdam (1995) 39-48.
- G. Coccoz, Compactage à froid des poudres métalliques : approche expérimentale et simulation numérique, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1995).
- G. Coccoz, M. Bellet, R. Lecot, L. Ackermann, H. A. Haggblad, Cold compaction of powder: experiments and simulation, Proc. PM'94, 1994 Powder Metallurgy World Congress, Paris, 6-9 juin 1994, Société Française de Métallurgie et de Matériaux et European Powder Metallurgy Association (eds.), Les Editions de Physique, vol. 1 (1994) 709-712.
- R. Codina, U. Schäfer, E. Oñate, Mold filling simulation using finite elements, Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow 4, (1994) 291-310.
- H. Combeau, F. Roch, J.-C. Chevrier, I. Poitault, G. Lesoult, Numerical Study of Heat and Mass transfer during Solidification of Steel Ingots, in: Advanced Computational Methods in Heat Transfer, L. C. Wrobel (ed.), Springer-Verlag, New York (1990) 79-90.
- H. Combeau, G. Lesoult, Macroseggregations and mesosegregations, Post-formation en solidification, W. Kurz, M. Rappaz, G. Lesoult (eds.), chap. 11, 11.1-11.48 (1994).
- H. Combeau, J.-M. Drezet, A. Mo, M. Rappaz, Modeling of microsegregation in macrosegregation computations, Metall. and Mat. Trans. A 27 (1996) 2314-2327.
- F. Costes, Modélisation thermomécanique par éléments finis de la coulée continue d'aciers, Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris (2004).
- T. Coupez, Calcul intensif en mise en forme des matériaux, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Nice - Sophia Antipolis (2003).
- J.-B. Dalin, J.-L. Chenot, Finite element computation of bulging in continuously cast steel with a visco-plastic model, Int. J. Num. Meth. Engng. 25 (1988) 147.
- H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris, Appendice-note D (1856).
- S. David, P. Auburtin, Simulation numérique des procédés de fonderie. Intérêts de la simulation thermomécanique en automobile, Colloque Matériaux 2002, Tours, 21-25 octobre 2002, Proc. CD-ROM édité par l'Université Technologique de Belfort-Montbéliard, 5 pages (2002).
- R. De Boer, W. Ehlers, The development of the concept of effective stress, Acta Mech. 83 (1990) 77.
- S. de La Chapelle, O. Jaouen, I. Poitault, B. Lusson, G. Brachotte, J.-P. Michalet, T. Coupez, M. Bellet, THERCAST[®] : un logiciel dédié à la simulation en fonderie, Fonderie Fondateur d'Aujourd'hui 230 (2003) 28-31.
- J.-L. Desbiolles, P. Thévoz, M. Rappaz, Micro-macroseggregation modeling in casting: a fully coupled approach, Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D. M. Stefanescu, J. A. Warren, M. R. Jolly & M. J. M. Krane (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (2003) 245-252.
- G. De Vahl Davis, I. P. Jones, Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution, Int. J. Num. Meth. Fluids 3 (1983) 249-264.
- D. A. Drew, Mathematical modeling of two-phase flow, Ann. Rev. Fluid Mech. 15 (1983) 261-291.
- A. Einstein, Eine neue bestimmung der moleküldimensionen, Annalen der Physik 19 (1906) 289-306. Voir aussi note corrective : Annalen der Physik 34 (1911) 591-592.
- M. S. Engelman, R. L. Sani, P. M. Gresho, The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element code for incompressible fluid flow, Int. J. Num. Meth. Engng. 2 (1982) 225-238.
- V. D. Fachinotti, Modelado Numerico de fenomenos termomecanicos en la solidificacion y enfriamiento de aceros obtenidos por colada continua, Thèse de Doctorat, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentine (2001).
- V. D. Fachinotti, M. Bellet, A diffusion-split method to deal with thermal shocks using standard linear tetrahedral finite elements, Proc. NUMIFORM'2004, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, S. Ghosh, J. M. Castro & J. K. Lee (eds.), Columbus, Ohio, USA, juin 2004, American Institute of Physics, New York (2004) 2258-2263.
- V. D. Fachinotti, M. Bellet, Linear tetrahedral finite elements for thermal shock problems, submitted to Int. J. Num. Meth. for Heat & Fluid Flow (2005)

- D. Favier, L. Orgéas, C. Geindreau, F. Bay, Y. Chastel, M. Bellet, Modélisation des phénomènes de ségrégation entre phases liquide et solide, In Mise en forme à l'état semi-solide, sous la direction de M. Suéry, collection Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Hermès Science Publications, Lavoisier, Paris (2002) 223-261.
- U. Feurer, Mathematisches modell der Warmrissneigung von binären aluminium legierungen, Giessereiforschung 28 (1976) 75-80.
- H. G. Fjaer, A. Mo, Alspen – a mathematical model for thermal stresses in direct chill casting of aluminum billets, Metallurgical Transactions B 21 (1990) 1049-1061.
- R. Forestier, Y. Chastel, E. Massoni, 3D inverse analysis model using semi-analytical differentiation for mechanical parameter estimation, Inverse Problems in Engng 11 (2003) 255-271.
- M. Fortin, A. Fortin, Experiments with several elements for viscous incompressible flows, Int. J. Num. Meth. Fluids 5, (1985) 911-928.
- C. A. Gandin, M. Rappaz, A coupled finite element - cellular automaton model for the prediction of dendritic grain structures in solidification processes, Acta Metall. Mater. 42 (1994) 2233-2246.
- S. Ganesan, D. R. Poirier, Conservation of mass and momentum for the flow of interdendritic liquid during solidification, Metall. Trans. B 21 (1990) 173-181.
- L. Gaston, A. Kamara, M. Bellet, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Approach to Non-Steady State Turbulent Fluid Flow with Application to Mould Filling in Casting, Int. J. Num. Meth. Fluids 34 (2000) 341-369.
- J.-C. Gebelin, Etude expérimentale et simulation numérique du comportement de l'alliage de magnésium AZ91 à l'état semi-solide, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (2000).
- C. Geindreau, J.-L. Auriault, Investigation of the viscoplastic behaviour of alloys in the semi-solid state by homogenization, Mechanics of Materials 31 (1999) 535-551.
- E. Gorlier, Caractérisation rhéologique et structurale d'un PET. Application au procédé de bi-étirage soufflage de bouteilles, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2001).
- S. Gouttebroze, M. Bellet, H. Combeau, 3D-FEM macrosegregation simulation on large steel ingots with adaptive anisotropic remeshing, Proc. ICCHMT Int. Conf. on Computational Heat and Mass Transfer, Cachan, 17-20 mai 2005.
- W. G. Gray, An efficient finite element scheme for two-dimensional surface water computation, Finite Elements in Water Resources (1977) 4_33-4_49
- W. G. Gray, K. O'Neill, On the general equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law, Water Resources Research 12 (1976) 148-154.
- M. Hassanizadeh, W. G. Gray, General conservation equations for multi-phase systems: 1. Averaging procedure, Adv. in Water Resources 2 (1979) 131-144.
- D. J. Hebditch, J. D. Hunt, Observations of ingot macrosegregation on model systems, Metall. Trans. 5 (1974) 1557-1564.
- A. Heinrich, Modélisation thermomécanique de la coulée continue d'acier en deux dimensions, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2003).
- C. W. Hirt, B. D. Nichols, Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries, J. Comp. Phys. 39 (1981) 201-225.
- A. E. Huespe, A. Cardona, V. D. Fachinotti, Thermomechanical model of a continuous casting process, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 182 (2000) 439-455.
- T. Jalanti, Etude et modélisation de la macroségrégation dans la coulée semi-continue des alliages d'aluminium, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2001).
- O. Jaouen, Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermomécanique du refroidissement des pièces coulées, Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris (1998).
- A. Jinka, M. Bellet, L. Fourment, A new three-dimensional finite element model for the simulation of powder forging processes: Application to hot forming of P/M connecting rod, Int. J. Num. Meth. Engng. 40 (1997) 3955-3978.
- T. Kajitani, J.-M. Drezet, M. Rappaz, Numerical simulation of deformation induced segregation in continuous casting of steel, Metallurgical and Materials Transactions A 32 (2001) 1479-1491.
- A. Kamara, Contribution à la modélisation par éléments finis des écoulements turbulents. Application au remplissage en fonderie, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1994).

- R. Knockaert, Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie de Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2001).
- R. Kosik, P. Fleischmann, B. Haindl, P. Pietra, S. Selberherr, On the interplay between meshing and discretization in three-dimensional diffusion simulation, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 19 (2000) 1233-1240.
- J. Kron, M. Bellet, A. Ludwig, B. Pustal, J. Wendt, H. Fredriksson, On distortions and gap formation during solidification and subsequent cooling of a cylindrical casting, *Int. J. Cast Metals Research* 17 (2004) 295-310.
- P. Kumar, C. L. Martin, S. B. Brown, Constitutive modelling and characterisation of the flow behavior of semi-solid metal alloy slurries, *Acta Metall. Mater.* 42 (1994) 3595-3614.
- L. A. Lalli, A model for deformation and segregation of solid-liquid mixtures, *Metall. Mater. Trans. A* 16 (1985) 1393-1403.
- S. Le Corre, M. Bellet, Two-phase modeling of metals solidification: a numerical approach for the thermo-mechanical problem, *Proc. NUMIFORM'2004*, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, S. Ghosh, J. M. Castro & J. K. Lee (eds.), Columbus, Ohio, USA, juin 2004, American Institute of Physics, New York (2004) 1185-1190.
- E. C. Lemmon, Multidimensional integral phase change approximations for finite element conduction codes, in *Numerical Methods in Heat Transfer*, R. W. Lewis, O. C. Zienkiewicz and K. Morgan (eds.), chapter 10, John Wiley and Sons (1981) 201-214.
- G. Lesoult, S. Sella, Analysis and prevention of centreline segregation during continuous casting of steel related to deformation of the solid phase, *Proc. 6th Int. Iron and Steel Congress*, Nagoya, Iron and Steel Institute of Japan, vol. 1 (1990) 681-688.
- G. Lesoult, C.-A. Gandin, N.T. Niane, Segregation during solidification with spongy deformation of the mushy zone, *Acta Mater.* 51 (2003) 5263-5283.
- R. W. Lewis, A. S. Usmani, J. T. Cross, Efficient mold filling simulation in castings by an explicit finite element method, *Int. J. Num. Meth. Fluids* 20 (1995) 493-506.
- R. W. Lewis, S. E. Navti, C. Taylor, A mixed Lagrangian-Eulerian approach to modelling fluid flow during mold filling, *Int. J. Num. Meth. Fluids* 25 (1997) 931-952.
- B. Q. Li, Y. Ruan, Integrated finite element model for transient fluid flow and thermal stresses during continuous casting, *J. Thermal Stresses* 18 (1995) 359-381.
- W. Liu, Finite element modelling of macrosegregation and thermomechanical phenomena in solidification processes, Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris (2005).
- A. Ludwig, M. Wu, Modeling of globular equiaxed solidification with a two-phase approach, *Metall. Mater. Trans. A* 33 (2002) 3673-3683.
- O. Ludwig, Etude expérimentale et modélisation du comportement rhéologique d'alliages Al-Cu en cours de solidification dans le cadre de la fissuration à chaud en coulée continue, Thèse de Doctorat en Science et Génie des Matériaux, Institut National Polytechnique de Grenoble (2004).
- Magmasoft, <http://www.magmaflow.com> (2003).
- F. Mampaey, Z. A. Xu, Simulation and experimental validation of mold filling, *Proc. 7th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, M. Cross & J. Campbell (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1995) 3-14.
- J. Mandel, Plasticité classique et viscoplasticité, *Cours CISM*, Udine (1971).
- F. Marini, Etude de la modélisation des conditions aux limites thermiques en coulée continue de brames d'acier. Rapport final de stage Mastère Mécanique Numérique (2004).
- C. L. Martin, D. Favier, M. Suéry, Viscoplastic behaviour of porous metallic materials saturated with liquid. Part I: Constitutive equations, *Int. J. Plasticity* 13 (1997) 215-235.
- C. L. Martin, D. Favier, M. Suéry, Fracture behaviour in tension of viscoplastic porous metallic materials saturated with liquid, *Int. J. Plasticity* 15 (1999) 981-1008.
- C. L. Martin, L. Orgéas, Modélisation des procédés de mise en forme, in *Mise en forme à l'état semi-solide, sous la direction de M. Suéry*, collection Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Hermès Science Publications, Lavoisier, Paris (2002) 197-221.

- M. Médale, M. Jaeger, Numerical simulation of incompressible flows with moving interfaces, *Int. J. Num. Meth. Fluids* 24 (1997) 615-638.
- M. Ménaï, Simulation numérique tridimensionnelle du refroidissement des pièces de fonderie : approche thermomécanique, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1995).
- M. M'Hamdi, A. Mo, C. L. Martin, Two-phase modeling directed toward hot tearing formation in aluminum direct chill casting, *Metall. Mater. Trans. A* 33 (2002) 2081-2093.
- K. Miyazawa, K. Schwerdtfeger, Macrosegregation in continuously cast steel slabs: preliminary theoretical investigation on the effect of steady state bulging, *Arch. Eisenhüttenwes.* 52 (1981) 415-422.
- A. Mo, An internal variable description of solidification suitable for macrosegregation modeling, *Metall. and Mat. Trans. B* 25 (1994) 597-605.
- S. Moto Mpong, Etude rhéologique et simulation numérique de l'injection d'un alliage d'aluminium à l'état semi-solide, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (2002).
- F. Muttin, T. Coupez, M. Bellet, J.-L. Chenot, Lagrangian finite element analysis of time-dependent viscous free surface flow using an automatic remeshing technique. Application to metal casting flow, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 36 (1993) 2001-2015.
- S. E. Navti, K. Ravindran, C. Taylor, R. W. Lewis, Finite element modelling of surface tension effects using a Lagrangian-Eulerian kinematic description, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 147 (1997) 41-60.
- T. G. Nguyen, D. Favier, M. Suéry, Theoretical and experimental study of the isothermal mechanical behaviour of alloys in the semi-solid state, *Int. J. Plasticity* 10 (1994) 663-693.
- J. Ni, C. Beckermann, A volume-averaged two-phase model for transport phenomena during solidification, *Metall. Trans. B* 22 (1991) 349-361.
- L.C. Nicolli, A. Mo, M. M'Hamdi, Modeling of macrosegregation caused by volumetric deformation in a coherent mushy zone, *Metall. Mater. Trans. A* 36 (2005) 433-442.
- S. Novel, Etude de l'adaptation du logiciel Forge3® aux produits minces, Rapport de stage de 4ème année INSA Lyon, Ecole des Mines de Paris (1998).
- C. Pélassou, E. Massoni, J.-L. Chenot, A mixed continuous formulation for solving thermomechanical equilibrium during hot forming process simulation, *Proc. NUMIFORM'2004*, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, S. Ghosh, J. M. Castro & J. K. Lee (eds.), Columbus, Ohio, USA, juin 2004, American Institute of Physics, New York (2004) 2276-2281.
- E. Pichelin, Calcul par éléments finis du remplissage 3D pour des fluides visqueux incompressibles. Application à l'injection, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1998).
- E. Pichelin, T. Coupez, Finite element solution of the 3D mold filling problem for viscous incompressible fluid, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 163 (1998) 359-371.
- O. Pironneau, Méthode des Eléments Finis pour les Fluides, Masson, Paris (1988).
- D. R. Poirier, Permeability for flow of interdendritic liquid in columnar-dendritic alloys, *Metall. Trans. B* 18 (1987) 245-255.
- D. R. Poirier, P. J. Nandapurkar, S. Ganesan, The energy and solute conservation equations for dendritic solidification, *Metall. Trans. B* 22 (1991) 889-900.
- C. Prakash, V. Voller, On the Numerical Solution of Continuum Mixture Equations Describing Binary Solid-Liquid Phase Change, *Num. Heat Transfer B* 15 (1989) 171-189.
- Procast, <http://www.calcom.ch/Products/Procast.html>, <http://www.ues-software.com/subhtm/products/procast.htm> (2003).
- N. N. Prokhorov, Resistance to hot tearing of cast metals during solidification, *Russian castings production* 2 (1962) 2-172-175.
- M. Protter, H. Weinberger, Maximum principles in differential equations, Springer, New York (1984).
- M. Putti, C. Cordes, Finite element approximation of the diffusion operator on tetrahedra, *SIAM J. Sci. Comput.* 19, (1998) 1154-1168.
- G. Quillet, Influence de la convection, naturelle ou forcée, sur l'apparition des mésoségrégations lors de la solidification des alliages métalliques, Thèse de Doctorat de l'Institut Polytechnique de Grenoble (2003).

- B. Rabbia, Modélisation du mouvement des grains et étude de l'influence sur la formation des structures équiaxes et sur les macroségrégations, Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Nancy (2004).
- M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, Modélisation numérique en science et génie des matériaux, Traité des Matériaux, tome 10, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1998).
- M. Rappaz, J.-M. Drezet, M. Gremaud, A new hot tearing criterion, *Metall. Mater. Trans. A* 30 (1999) 449-456.
- N. Renon, Simulation numérique par éléments finis des grandes déformations des sols. Application à la scarification, Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris (2002).
- A. Rodriguez-Villa, Etude théorique et expérimentale de l'extrusion-soufflage de corps creux en polymère, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1997).
- E. Saez, Etude numérique du remplissage 3D en fonderie, Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris (2003).
- F. M. Schmidt, Etude expérimentale et modélisation du procédé d'injection/soufflage bi-orientation en cycle froid de bouteilles en PET, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1995).
- F. M. Schmidt, J.-F. Agassant, M. Bellet, L. Desoutter, Viscoelastic simulation of P.E.T stretch/blow molding process, *Int. J. Non Newtonian Fluid Mech.* 64 (1996) 19-42.
- F. M. Schmidt, A. Rodriguez-Villa, J.-F. Agassant, M. Bellet, Analytical models for the inflation of a polymeric tube, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19 (2000) 89-104.
- S. Shima, M. Oyane, Plasticity theory for porous metals, *Int. J. Mech. Sci.* 18 (1976) 285-291.
- B. Sirrel, M. Holliday, J. Campbell, The benchmark test 1995, *Proc. 7th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, London, 1995, M. Cross & J. Campbell (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1995) 915-933.
- Suyitno, W. H. Kool, L. Katgerman, Micro-mechanical model at triple junctions in DC casting, *Materials Science Forum* (2002) 396-402
- K. Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley and Sons, New York (1943).
- L. Thuinet, G. Lesoult, H. Combeau, Computer simulation of microsegregation in the case of columnar growth involving a peritectic transformation for multicomponent steels, *Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D. M. Stefanescu, J. A. Warren, M. R. Jolly & M. J. M. Krane (eds.), The Minerals, Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (2003) 237-244.
- S. Toyoshima, Y. Takahashi, A numerical simulation of forming processes for semi-solid materials, *ISIJ International* 31 (1991) 577-582.
- N. Triolet, Simulation 3D du comportement thermomécanique de la peau solide dans la lingotière CC1 de Sollac Méditerranée, Rapport interne Irsid (Arcelor Research) PE/03/R/053 (2003).
- N. Triolet, M. Bobadilla, M. Bellet, Thermomechanical modeling of steel slab continuous casting : a useful tool to optimize process actuators. *Proc. Journées Sidérurgiques Internationales*, Paris, 9-10 décembre 2004, Association Technique de la Sidérurgie Française (2004).
- N. Triolet, M. Bobadilla, L. Avedian, M. Bellet, The thermomechanical modeling of steel slab continuous casting: a useful tool to adapt process actuators, *Proc. ECC2005 5th European Conference on Continuous Casting*, Nice, 20-22 juin 2005, J.Y. Lamant et al. (eds.), Association Technique de la Sidérurgie Française (2005).
- M.-H. Vantal, Etude numérique et expérimentale du thermoformage de polymères, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1995).
- P. Vicente-Hernandez, Vers une approche thermo-mécanique du procédé de fonderie : caractérisation rhéologique et microstructurale d'alliages métalliques à l'état semi-solide, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris (1994).
- R. H. Wagoner, J.-L. Chenot, *Metal forming analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni (2001).
- D. M. Waite, M. T. Samonds, Finite element free surface modeling, in *Proc. 6th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes*, T. S. Piwonka, V. Voller, L. Katgerman et al. (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1993) 357-364.
- C. Y. Wang, C. Beckermann, Equiaxed dendritic solidification with convection: Part 1. Multiscale/multiphase modeling, *Metall. and Mat. Trans. A* 27 (1996) 2754-2764.

- K. Wünnenberg, Strangaus bauchung zwischen stützrollen beim stranggiessen von brammen, Stahl und Eisen 6 (1978) 254-259.
- J. D. Zhu, I. Ohnaka, Computer simulation of fluid flow and heat transfer in partially reinforced casting, Proc. 7th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, M. Cross, J. Campbell (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA (1995) 23-30.

9 NOTATIONS

c	titre volumique en espèce chimique (élément d'alliage) [- ou %]
\tilde{c}	concentration volumique en espèce chimique (élément d'alliage) [mole m ⁻³]
c_p	chaleur massique [J kg ⁻¹ K ⁻¹]
D	coefficient de diffusion [m ²]
E	module de Young [Pa]
\mathbf{F}	force [N]
F	fonction de présence [-]
f_s, f_l	fraction massique de solide, de liquide [-]
\mathbf{g}	vecteur gravité [m s ⁻²]
g_s, g_l	fraction volumique de solide, de liquide [-]
H	coefficient d'écrouissage [-]
h	enthalpie massique [J kg ⁻¹]
h	coefficient de transfert thermique [W m ⁻² K ⁻¹]
h	taille de la discrétisation spatiale [m]
\mathbf{I}	tenseur identité [-]
J	échange d'espèce chimique (élément d'alliage) entre phases [mole m ⁻³ s ⁻¹]
\mathbf{j}	vecteur flux d'espèce chimique (d'élément d'alliage) [mole m ⁻²]
k	coefficient de partage [-]
K	consistance viscoplastique [Pa s ^m]
L	chaleur latente de fusion, par unité de masse [J kg ⁻¹]
\mathbf{M}	vecteur échange de quantité de mouvement entre phases [N m ⁻³]
m	coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation [-]
m	pente de liquidus [K % ⁻¹]
\mathbf{n}	vecteur normal, en général extérieur au domaine considéré [-]
$\tilde{\mathbf{n}}$	vecteur normal, dit conservatif, au nœuds frontières du maillage [-]
n	coefficient d'écrouissage [-]
\mathbf{P}	vecteur des pressions nodales [Pa]
$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$	pression hydrostatique [Pa]
p^*	champ de pression virtuel, ou fonction test [Pa]
Q	échange de chaleur entre phases [W m ⁻³]
\mathbf{q}	vecteur flux de chaleur [W m ⁻²]
S	surface [m ²]
$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$	tenseur déviateur des contraintes [Pa]
\mathbf{T}	vecteur contrainte [Pa]

\mathbf{T}	vecteur des températures nodales [K ou °C]
T	température [K ou °C]
T_S, T_L	température de solidus, de liquidus [K ou °C]
T_C	température critique de transition de comportement solide/liquide [K ou °C]
T_m	température de fusion du métal de base de l'alliage considéré [K ou °C]
T_{ref}	température de référence [K ou °C]
t	temps [s]
\mathbf{V}	vecteur des vitesses nodales [m s^{-1}]
V_0	volume élémentaire représentatif et sa mesure [m^3]
V_k	volume occupé par la phase k dans V_0 [m^3]
\mathbf{v}	vecteur ou champ de vitesse [m s^{-1}]
\mathbf{v}^*	vecteur ou champ de vitesse virtuel [m s^{-1}]
\mathbf{v}_{msh}	vecteur vitesse de maillage [m s^{-1}]
\mathbf{w}^k	vitesse de l'interface de la phase k [m s^{-1}]
w	titre massique en espèce chimique (élément d'alliage) [- ou %]
\mathbf{X}	vecteur des coordonnées spatiales nodales [m]
\mathbf{x}	vecteur des coordonnées spatiales [m]
α	coefficient d'expansion thermique linéique [K^{-1}]
β_T	coefficient d'expansion thermique volumique [K^{-1}]
β_c	coefficient d'expansion solutale volumique [$\%^{-1}$]
χ	coefficient de pénalisation [-]
χ_k	fonction de présence de la phase k [-]
δ	distance algébrique par rapport à un obstacle (positive vers l'extérieur) [m]
$\Delta\epsilon^{tr} = \frac{\rho(T_L) - \rho(T_S)}{\rho(T_L)} < 0$	taux de retrait : changement de volume relatif associé à la totalité du changement de phase liquide-solide [-]
ϵ	coefficient de diffusion du soluté dans le liquide [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
$\dot{\epsilon}$	tenseur taux (ou vitesse) de déformation, partie symétrique du tenseur gradient de vitesse [s^{-1}]
$\dot{\epsilon}^{el}$	partie élastique du tenseur des taux de déformation [s^{-1}]
$\dot{\epsilon}^{vp}$	partie viscoplastique du tenseur des taux de déformation [s^{-1}]
$\dot{\epsilon}^{th}$	partie thermique du tenseur des taux de déformation [s^{-1}]
$\dot{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}}$	taux de déformation plastique équivalent au sens de von Mises [s^{-1}]

$\varepsilon_{eq} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq} dt$	déformation équivalente au sens de von Mises [-]
ε_r	émissivité de rayonnement des corps gris [-]
ϕ	flux thermique [W m^{-2}]
φ	fonction test [-]
Γ	échange de masse entre phases (flux de quantité de mouvement) [$\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$]
γ	vecteur accélération [m s^{-2}]
K	perméabilité [m^2]
λ	conductibilité ou conductivité thermique [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
λ_2	espacement interdendritique secondaire [m]
μ_l	viscosité dynamique de la phase liquide [Pa s ou $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$]
ν	coefficient de Poisson [-]
ρ	masse volumique [kg m^{-3}]
ρ_S, ρ_L	masse volumique à la température de solidus, à la température de liquidus [kg m^{-3}]
ρ_s, ρ_l	masse volumique de la phase solide, de la phase liquide [kg m^{-3}]
Σ^k	tenseur des contraintes effectives sur la phase k [Pa]
σ	tenseur des contraintes de Cauchy [Pa]
$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$	contrainte équivalente de von Mises [Pa]
σ_0	seuil de plasticité statique (si $\sigma_{eq} < \sigma_0$, le matériau est élastique) [Pa]
σ_{00}	limite élastique (seuil de plasticité initial) [Pa]
σ_r	constante de Stefan-Boltzmann ($= 5,67 \times 10^{-8}$) [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$]
$\langle \psi \rangle^k \equiv \psi_k$	valeur moyenne intrinsèque de la fonction ψ dans la phase k ($k = l, s$)
$\langle \psi^k \rangle$	valeur moyenne de la fonction ψ pour la phase k dans le v.e.r. V_0 ($k = l, s$)
$\langle \psi \rangle = \langle \psi^l \rangle + \langle \psi^s \rangle$	valeur moyenne de la fonction ψ dans le v.e.r. V_0
$\frac{d}{dt}$	dérivée particulière, ou totale, par rapport au temps
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps (en un même point de l'espace)
$\frac{\partial_{msh}}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps (en un même nœud d'un maillage)
\times	produit tensoriel : $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tenseur de composantes $a_i b_j$ si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux champs de vecteurs
:	produit doublement contracté de deux tenseurs : $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = a_{ij} b_{ij}$ si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux tenseurs d'ordre 2

$(\cdot)^T$ transposition d'un tenseur : $(\boldsymbol{a}^T)_{ij} = a_{ji}$ si \boldsymbol{a} est un tenseur d'ordre 2

convention de sommation des indices répétés

10 ANNEXE : FORME FAIBLE DU PROBLEME MECANIQUE EN DIPHASIQUE

Pour la phase liquide, nous partons de l'équation locale moyennée de conservation de la quantité de mouvement (129) :

$$\nabla \cdot \langle s^l \rangle - g_l \nabla p_l + \mathbf{M}_l^d + g_l \rho_l \mathbf{g} = \rho_l \frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \rho_l \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \quad (160)$$

Sa forme intégrale est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_0 \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \langle s^l \rangle) \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} g_l \nabla p_l \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} g_l \rho_l \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^* \\ - \int_{\Omega} \rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \right) \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (161)$$

Après intégration par parties du premier terme et utilisation de la relation entre tenseur déviateur et tenseur des contraintes moyennés, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_0 \quad \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}^l \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\partial\Omega} \langle p_l \rangle \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega} \langle s^l \rangle : \nabla \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} g_l \nabla p_l \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} g_l \rho_l \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^* \\ - \int_{\Omega} \rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \right) \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (162)$$

Ceci donne, en réutilisant le théorème de la divergence dans le second terme,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_0 \quad \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}^l \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \nabla \langle p_l \rangle \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \langle p_l \rangle \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} \langle s^l \rangle : \nabla \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} g_l \nabla p_l \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{u}^* \\ + \int_{\Omega} g_l \rho_l \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} \rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \right) \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (163)$$

En arrangeant les termes contenant la pression de liquide, on obtient l'équation (137) :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_0 \quad \int_{\Omega} \langle s^l \rangle : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^*) - \int_{\Omega} p_l \nabla \cdot (g_l \mathbf{u}^*) - \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}^l \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{u}^* - \int_{\Omega} g_l \rho_l \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^* \\ + \int_{\Omega} \rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_l \mathbf{v}_l) + \nabla \cdot (g_l \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_l) \right) \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

Pour la phase solide, nous partons de l'équation de locale moyennée de conservation de la quantité de mouvement (131) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}^s - g_s \nabla p_l - \mathbf{M}_l^d + g_s \rho_s \mathbf{g} = \rho_s \frac{\partial}{\partial t} (g_s \mathbf{v}_s) + \rho_s \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s) \quad (165)$$

Sa forme intégrale est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_0 \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}^s) \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} g_s \nabla p_l \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} g_s \rho_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* \\ - \int_{\Omega} \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s) \right) \cdot \mathbf{v}^* = 0 \end{aligned} \quad (166)$$

Après intégration par parties du premier terme et utilisation de la relation entre tenseur déviateur et tenseur des contraintes moyennés (90), nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_0 \quad & \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}^s \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\partial\Omega} g_s p_l \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma}^s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}^*) - \int_{\Omega} g_s \nabla p_l \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} g_s \rho_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* \\
& - \int_{\Omega} \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s) \right) \cdot \mathbf{v}^* = 0
\end{aligned} \tag{167}$$

En réutilisant le théorème de la divergence dans le second terme, et en arrangeant les termes en pression de liquide, on obtient l'équation (138) :

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_0 \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma}^s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}^*) - \int_{\Omega} p_l \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}^*) - \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}^s \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} \mathbf{M}_l^d \cdot \mathbf{v}^* - \int_{\Omega} g_s \rho_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^* \\
& + \int_{\Omega} \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (g_s \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_s) \right) \cdot \mathbf{v}^* = 0
\end{aligned} \tag{168}$$

11 SELECTION D'ARTICLES SUR LA MODELISATION DES PROCEDES DE SOLIDIFICATION

Pour illustrer cette thématique j'ai choisi six articles. Le premier est le premier article de synthèse sur le logiciel THERCAST®. Les deuxième et troisième illustrent des applications de la méthode ALE en remplissage et en thermomécanique. Le quatrième porte sur l'implantation de la tension de surface et constitue un exercice récréatif. Le cinquième est le fruit d'un travail coopératif sous la forme d'un benchmark pratiqué dans le cadre du réseau européen MEBSP et le dernier est centré sur l'application à la coulée continue d'aciers.

Thermomechanics of the cooling stage in casting processes:
3D finite element analysis and experimental validation
Michel BELLET, Florent DECULTIEUX, Mamar MENAI,
François BAY, Christophe LEVAILLANT, Jean-Loup CHENOT,
Pal SCHMIDT, Ingvar L. SVENSSON
Met. Trans. B 27 (1996) 81 – 100

An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Approach to Non-Steady State
Turbulent Fluid Flow with Application to Mould Filling in Casting
Laurence GASTON, Alima KAMARA, Michel BELLET
Int. J. Num. Meth. Fluids 34 (2000) 341-369

ALE method for solidification modelling
Michel BELLET, Victor D. FACHINOTTI
Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg. 193 (2004) 4355-4381

Implementation of surface tension with wall adhesion effect
in a three-dimensional finite element model for fluid flow
Michel BELLET
Comm. Num. Meth. Engng. 17 (2001) 563-579

Comparison of numerical simulation models for predicting temperature in
solidification analysis with reference to air gap formation
Jenny KRON, Michel BELLET, Andreas LUDWIG, Bjoern PUSTAL,
Joachim WENDT, Hasse FREDRIKSSON
Int. J. Cast Metals Research 17 (2004) 295-310

A two-dimensional finite element thermomechanical approach to
a global stress-strain analysis of steel continuous casting
Michel BELLET, Alban HEINRICH
ISIJ International 44 (2004) 1686-1695

12 LISTE DES PUBLICATIONS

12.1 PUBLICATIONS DANS DES REVUES A COMITE DE LECTURE

- PR1 BELLET, Michel, MASSONI, Elisabeth, CHENOT, Jean-Loup, Numerical simulation of thin sheet forming processes by the finite element method, *Engineering Computations* 7 (1990) 21-32.
- PR2 CHENOT, Jean-Loup, BELLET, Michel, A velocity approach to elasto-plastic and elasto-viscoplastic calculation by the finite element method, *J. Eng. Industry ASME* 112 (1990) 150-154.
- PR3 MUTTIN, Frédéric, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Numerical simulation of inertial effects in Newtonian flows. Application to the filling stage of the die casting process, *J. Mat. Proc. Tech.* 31 (1992) 65-74.
- PR4 MUTTIN, Frédéric, COUPEZ, Thierry, BELLET, Michel et CHENOT, Jean-Loup, Lagrangian finite element analysis of time-dependent viscous free surface flow using an automatic remeshing technique. Application to metal casting flow, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 36 (1993) 2001-2015.
- PR5 BELLET, Michel, CORSINI, Christine, ASSAKER, Dany, MERCIER, P. et WOUTERS, Paul, A numerical model of the extrusion blow - molding process, *J. Reinforced Plastics and Composites* 12 (1993) 498-505.
- PR6 BELLET, Michel, DECULTIEUX, Florent, MENAI, Mamar, BAY, François, LEVAILLANT, Christophe, CHENOT, Jean-Loup, SCHMIDT, Pal et SVENSSON, Ingvar, Thermomechanics of the cooling stage in casting processes : 3D finite element analysis and experimental validation, *Met. Trans. B* 27 (1996) 81-100.
- PR7 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel et DESOUTTER, Luc, Viscoelastic simulation of P.E.T stretch/blow molding process, *Int. J. Non Newtonian Fluid Mech.* 64 (1996) 19-42.
- PR8 JINKA, Ashoka et BELLET, Michel, Hot forging of a P/M connecting rod: three-dimensional computer model, *Int. J. Powder Metallurgy* 32 (1996) 255-258.
- PR9 BORDERE, Sylvie, MAGNY, Christophe, MARCHAL, Karine, BELLET, Michel, LEVAILLANT, Christophe, Prediction of the pore-closing kinetics during the consolidation stage of SiC unidirectional long fibers: titanium alloy matrix composites, *J. Materials Processing Technology* 62 (1996) 100-107.
- PR10 JINKA, Ashoka, BELLET, Michel et FOURMENT, Lionel, A new three-dimensional finite element model for the simulation of powder forging processes: Application to hot forming of P/M connecting rod, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 40 (1997) 3955-3978.
- PR11 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, Experimental study and numerical simulation of the injection stretch/blow molding process, *Polymer Engng and Sci.* 38 (1998) 1399-1412.
- PR12 BELLET, Michel, VANTAL, Marie-Hélène, MONASSE, Bernard, Thermal effects in the numerical simulation of the thermoforming of multilayered polymer sheets, *Int. Polymer Processing* 13 (1998) 299-308.
- PR13 BELLET, Michel, Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation. Application to metal powder hot compaction, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 175 (1999) 19-40.
- PR14 SCHMIDT, Fabrice, RODRIGUEZ-VILLA, Andres, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, Analytical models for the inflation of a polymeric tube, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19 (2000) 89-104.
- PR15 GASTON, Laurence, KAMARA, Alima, BELLET, Michel, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Approach to Non-Steady State Turbulent Fluid Flow with Application to Mould Filling in Casting, *Int. J. Num. Meth. Fluids* 34 (2000) 341-369.
- PR16 BELLET, Michel, Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow, *Comm. Num. Meth. Engng.* 17 (2001) 563-579.
- PR17 M. BELLET, V. D. FACHINOTTI, ALE method for solidification modelling, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* 193 (2004) 4355-4381.
- PR18 M. BELLET, A. HEINRICH, A two-dimensional finite element thermomechanical approach to a global stress-strain analysis of steel continuous casting, *ISIJ International* 44 (2004) 1686-1695.
- PR19 J. KRON, M. BELLET, A. LUDWIG, B. PUSTAL, J. WENDT, H. FREDRIKSSON, Comparison of numerical simulation models for predicting temperature in solidification analysis with reference to air gap formation, *Int. J. Cast Metals Research* 17 (2004) 295-310.
- PR20 BELLET, Michel, JAOUEN, Olivier, POITRAULT, Isabelle, An ALE-FEM approach to the thermomechanics of solidification processes with application to the prediction of pipe shrinkage, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow* 15 (2005) 120-142.
- PR21 S. GOUTTEBROZE, V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, H. COMBEAU, 3D-FEM modeling of macrosegregation in solidification of binary alloys, accepté dans *Int. J. Forming Processes*, à paraître.
- PR22 V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, Linear tetrahedral finite elements for thermal shock problems, soumis à *Int. J. Num. Meth. for Heat & Fluid Flow* (2005)
- PR23 P. GIRARD, M. BELLET, G. CAILLIBOTTE, M. CARIN, S. GOUNAND, M. MEDALE, Benchmark for fluid flow in weld pool simulation. Two-dimensional transient computational models for arc welding, soumis à *Science and Technology of Welding and Joining* (2005)

12.2 PUBLICATIONS DANS D'AUTRES REVUES

- P1 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, La thermique des métaux en mise en forme, Revue Générale de Thermique, n° 372, décembre 1992, pp.688-700 (1992)
- P2 LEFEVRE Xavier, BOLLA, Marc, LEFORESTIER, Eric, BELLET, Michel, Influence de la nature du tenon radulaire sur la répartition des contraintes au sein d'une reconstitution prothétique. Analyse par la méthode des éléments finis, Journal de Biomatériaux Dentaires, 15, pp. 117-128, 2000.
- P3 BELLET, Michel, CORSINI, Christine, BILLON, Noëlle, Simulation du thermoformage : la réalité virtuelle au service de la production, Infos Polymères, n°39, pp. 4-5, 2000.
- P4 LEFEVRE, Xavier, BOLLA, Marc, LEFORESTIER, Eric, BELLET, Michel, Influence de la composition des tenons en fibre de carbone sur la répartition des contraintes au sein d'une reconstitution corono-radulaire. Analyse par la méthode des éléments finis, Clinic, 22, pp. 475-480, 2001.
- P5 BELLET, Michel, MONASSE, Bernard, AGASSANT, Jean-François, Simulation numérique des procédés de soufflage de polymères, Techniques de l'Ingénieur, vol. AM, article AM3705, pp. 1-23, 2002.
- P6 DE LA CHAPELLE, Sophie, JAOUEN, Olivier, POITRAULT, Isabelle, LUSSON, Benoît, BRACHOTTE, Gilbert, MICHALET, Jean Pierre, COUPEZ, Thierry, BELLET, Michel, THERCAST® : un logiciel dédié à la simulation en fonderie, Fonderie Fondateur d'Aujourd'hui, n° 230, pp. 28-31, 2003.
- P7 N. TRIOLET, M. BOBADILLA, M. BELLET, L. AVEDIAN, P. MABELLY, A thermomechanical modelling of continuous casting to master steel slabs internal soundness and surface quality, soumis à la Revue de Métallurgie (2005).

12.3 CONFERENCES INVITEES

- K1 BELLET, Michel, Computation of stresses in solidification problems, COST 504 annual meeting, Gand, Belgique, 5-7 avril 1992.
- K2 BELLET, Michel, MENAI, Mamar, BAY, François, CHENOT, Jean-Loup, A multi-domain preconditioned conjugate gradient algorithm for 3D finite element thermal computations, CNI/MAT'92, International Workshop on Parallelism and Distributed Computing in Materials Science : Trends and Challenges, Nancy, France, 9-11 décembre 1992, p.IV-I2 (1992)
- K3 MENAI, Mamar et BELLET, Michel, Thermomechanical coupling during solidification: a 3D finite element approach, Proc. 7th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Londres, 10-15 septembre 1995, M.Cross et J.Campbell (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp.723-730 (1995)
- K4 BELLET, Michel, GASTON, Laurence, MENAI, Mamar, Modélisation numérique des procédés de fonderie, Journées d'Automne, Société Française de Métallurgie et de Matériaux (SF2M), Paris, 17-19 octobre 1995.
- K5 M. BELLET, J.F. AGASSANT, B. MONASSE, M.H. VANTAL, A. RODRIGUEZ-VILLA, Simulation par éléments finis des procédés de soufflage des polymères, Proc. Conf. Eléments Finis Polymères, Nancy, 3-4 novembre 1997, C. G'Sell & J.C. Grandidier (eds.), Apollor, Nancy, article 7, pp. 1-34 (2001)
- K6 BELLET, Michel, Modélisation des procédés de soufflage de polymères, Forum XAO-Plasturgie, 1^{er}-2 avril 1999, Saint-Dié-des-Vosges.
- K7 BELLET, Michel, JAOUEN, Olivier, Modelling of the mechanical phenomena in casting, International Symposium on « Modelling of microstructures and solidification process », Journées d'Automne de la Société Française de Métallurgie et de Matériaux, Paris, 3 novembre 1999, Revue de Métallurgie, Cahiers d'Informations Techniques, numéro hors série, p. 33, 1999.
- K8 BELLET, Michel, JAOUEN, Olivier, Finite element approach of thermomechanics of solidification processes, Proc. Int. Conf. On Cutting Edge of Computer Simulation of Solidification and Casting, Osaka (Japon), November 14-16, 1999, I. Ohnaka and H. Yasuda (eds.), The Iron and Steel Institute of Japan (ISIJ), pp. 173-190, 1999.
- K9 BELLET Michel, FOURMENT, Lionel, CORSINI, Christine, PARIS, Laurent, CAUSSAT, Jean-Jacques, SPENCE, Julian, Superplastic forming: from numerical modelling to automated process optimization, Proc. EURO-SPF 01, 1st European Conf. on Superplastic Forming, Villars-de-Lans, France, 17-19 mai 2001, J.-J. Blandin (ed.), Presses Universitaires de Grenoble, pp. 11-17 (2003)
- K10 FACHINOTTI Victor D., BELLET Michel, Three-Dimensional Finite Element Modelling of Thermomechanics and Macrosegregation in Binary Alloys Solidification, Proc. ESAFORM 6th Int. Conf. on Material Forming, Salerne (Italie), 28-30 avril 2003, Université de Salerne, pp. 511-514, 2003.
- K11 M. BELLET, E. SAEZ, O. JAOUEN, T. COUPEZ, A 3D-FEM solver for non steady state Navier-Stokes equations with free surface. Application to mold filling simulation in casting processes, Symposium on Multiphase Phenomena and CFD Modelling and Simulation in Materials Processes, TMS Annual Meeting, Charlotte (NC, USA) March 2004, Proc. ed. by L. Nastac and B.Q. Li, The Minerals, Metals & Materials Society, pp. 209-218, 2004.

12.4 LIVRES (DIRECTION)

- L1 RAPPAZ, Michel, BELLET, Michel et DEVILLE, Michel, Modélisation numérique en science et génie des matériaux, Traité des Matériaux, tome 10, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- L2 RAPPAZ, Michel, BELLET, Michel et DEVILLE, Michel, Numerical Modelling in Materials Science and Engineering, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

12.5 LIVRES ET CDROMS (COLLABORATION)

- CL1 BELLET, Michel, MASSONI, Elisabeth et CHENOT, Jean-Loup, Calcul des membranes élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques. Application à l'emboutissage et au formage superplastique, In Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, P.Franciosi et F.Moussy (eds.), Presses du CNRS et IRSID, sixième partie, chap.II, p.501 (1990)
- CL2 MASSONI, Elisabeth, CHENOT, Jean-Loup et BELLET, Michel, A 3D finite element approach for predicting the deformation of an anisotropic elasto-plastic membrane, In Non Linear Computational Mechanics - State of the Art, P.Wriggers et W.Wagner (eds.), Springer Verlag, chap.V.6, p.473 (1991)
- CL3 CHENOT, Jean-Loup et BELLET, Michel, The viscoplastic approach for the finite element modelling of metal forming processes, In Numerical Modelling of Material Deformation Processes. Research, Developments and Applications, P.Hartley, I.Pillinger et C.Sturgess (eds.), Springer Verlag, London, pp.179-224 (1992)
- CL4 BELLET, Michel et CHENOT, Jean-Loup, A lagrangian approach to fluid flow in metal casting processes, In Computational Methods for Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow, L.C.Wrobel et C.A.Brebbia (eds.), Computational Mechanics Publications et Elsevier Applied Science, Chapitre 13, pp.287-316 (1993)
- CL5 BELLET, Michel, La modélisation numérique des procédés de fonderie, In La Mise en Forme des Matériaux, Vingt Ans de Recherche au Cemef. Presses de l'Ecole des Mines de Paris, Collection Sciences de la Matière, Paris, pp. 43-53 (1996)
- CL6 FOURMENT, Lionel, BELLET, Michel, Hot powder forging, In Modelling in Welding, Hot Powder Forming and Casting, L. Karlsson (ed.), ASM International, chap. 7, pp. 131-158 (1997)
- CL7 DECULTIEUX, Florent, MENAI, Mamar, BAY, François, LEVAILLANT, Christophe, SCHMIDT, Pal, SVENSSON, Ingvar, BELLET, Michel, Thermomechanical modeling in casting with experimental validation, In Modelling in Welding, Hot Powder Forming and Casting, L. Karlsson (ed.), ASM International, chap. 10, pp. 291-313 (1997)
- CL8 BELLET, Michel, AGASSANT, Jean-François, MONASSE, Bernard, VANTAL, Marie-Hélène, RODRIGUEZ-VILLA, Andres, Simulation par éléments finis des procédés de soufflage des polymères, In Eléments Finis Polymères, C. G'Sell (ed.) (1998)
- CL9 BELLET, Michel, FOURMENT, Lionel, MASSONI, Elisabeth, CHENOT, Jean-Loup, Modélisation numérique du contact et du frottement en mise en forme des métaux, In Surfaces tribologie et formage des matériaux. Presses de l'Ecole des Mines de Paris, Collection Sciences de la Matière, Paris, pp. 435-460 (2001)
- CL10 D. FAVIER, L. ORGEAS, C. GEINDREAU, F. BAY, Y. CHASTEL, M. BELLET, Modélisation des phénomènes de ségrégation entre phases liquide et solide, In Mise en forme à l'état semi-solide, sous la direction de M. Suéry, collection Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Hermès Science Publications, Lavoisier, Paris, pp. 223-261 (2002)

12.6 COMMUNICATIONS A DES CONGRES, AVEC ACTES

- CP1 MASSONI, Elisabeth, BELLET, Michel, ABOUAF, Marc, CHENOT, Jean-Loup, Large displacements numerical calculation of 3-dimensional elasto-plastic and elasto-viscoplastic membrane by the finite element method, Proc. Int. Conf. on Numerical Methods for Non-Linear Problems, Dubrovnik, Yougoslavie, septembre 1986, C.Taylor, D.R.J.Owen, E.Hinton et F.B.Damjanic (eds.), Pineridge Press, vol.3, p.480 (1986)
- CP2 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Numerical modelling of 3-dimensional superplastic forming of titanium sheet, Int. Conf. on Titanium Products and Applications, San Francisco (CA), USA, octobre 1986, The Titanium Development Association, Dayton (OH), vol.2, p.1175 (1986)
- CP3 BELLET, Michel, MASSONI, Elisabeth, CHENOT, Jean-Loup, A viscoplastic membrane formulation for the 3-dimensional analysis of thin sheet metal forming, Proc. COMPLAS I, 1st Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelone, Espagne, avril 1987, D.R.J.Owen, E.Hinton, E.Onate (eds.), Pineridge Press, vol.2, p.917 (1987)
- CP4 MASSONI, Elisabeth, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, DETRAUX, Jean-Michel, DE BAYNAST, Christophe, A finite element modelling for deep drawing of thin sheet in automotive industry, Proc. 2nd Int. Conf. on Technology of Plasticity (ICTP), Stuttgart, RFA, août 1987, K.Lange (ed.), Pineridge Press, p.917 (1987)
- CP5 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Numerical simulation of superplastic forming, Proc. 6th World Conf. on Titanium, Cannes, France, juin 1988, P.Lacombe, R.Tricot et G.Béranger (eds.), Société Française de Métallurgie, Les Editions de Physique, vol.III, p.1203 (1988)

- CP6 MASSONI, Elisabeth, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Thin sheet forming numerical analysis with a membrane approach, Proc. Euromech Colloquium n° 233 "Modelling of Metal Forming Processes", Sophia-Antipolis, France, août 1988, J.L.Chenot et E.Onate (eds.), Kluwer, p.187 (1988)
- CP7 EL HADJ, Mohammed, LE DAIN, Marie-Anne, DEMAY, Yves, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, A multi-grid finite element method for 3D linear elasticity with application, Proc. FEMCAD 88, Paris, France, octobre 1988, A. Niku-Lari (eds.), SAS Series (1988)
- CP8 F.LEBON, LE DAIN, Marie-Anne, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, RAOUS, Michel, Introduction aux méthodes multi-grilles en mécanique des structures linéaires et non-linéaires, Proc. GRECO Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, Giens, France, mai 1989, J.M.Fouet, P.Ladevèze et R.Ohayon (eds.), Pluralis, vol.3, p.215 (1989)
- CP9 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Numerical modelling of thin sheet superplastic forming processes, Proc. NUMIFORM'89, 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Fort Collins (CO), USA, juin 1989, E.G.Thompson, R.D.Wood, O.C.Zienkiewicz et A.Samuelsson (eds.), Balkema, pp. 401-406 (1989)
- CP10 SOYRIS, Nathalie, BAY, François, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Heat transfer analysis with a three dimensional finite element code. Application to the casting process, Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems, Swansea, Grande Bretagne, juillet 1989, R.W.Lewis et K.Morgan (eds.), Pineridge Press, p.280 (1989)
- CP11 LE DAIN, Marie-Anne, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, A multigrid finite element method for linear elasticity with applications in 2D, Proc. NUMETA'90, 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Engineering - Theory and Applications, Swansea, Grande Bretagne, janvier 1990, G.N.Pande et J.Middleton (eds.), Elsevier, vol.1, p.527 (1990)
- CP12 BRIOIST, Jean-Jacques, BAY, François, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Three dimensional finite element thermal computation and coupled stress analysis for the casting process, Proc. Heat Transfer'90, Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Portsmouth, Grande Bretagne, juillet 1990, L.C.Wrobel, C.A.Brebbia et A.J.Nowak (eds.), Computational Mechanics Publications, Springer Verlag, p.91 (1990)
- CP13 MUTTIN, Frédéric, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Numerical simulation of inertial effects in newtonian flows. Application to the filling stage of the die casting process, Proc. Int. Conf. on Developments in Forming Technology, Lisbonne, Portugal, septembre 1990, S.K.Ghosh (ed.), Staffordshire Polytechnic, p.1.47 (1990)
- CP14 LE DAIN, Marie-Anne, FOURMENT, Lionel, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Development of a multigrid method and an a posteriori estimated error for 2D elasticity problems, Proc. European Conf. on New Advances in Computational Structural Mechanics, Giens, France, 2-5 avril 1991, P.Ladevèze et O.C.Zienkiewicz (eds.), p.71 (1991)
- CP15 MUTTIN, Frédéric, COUPEZ, Thierry, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Newtonian fluid computation in Lagrangian variables with a remeshing technique. Application to the filling stage of the die casting process, Proc. 1st Int. Conf. on Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems, Southampton, Grande Bretagne, 2-4 juillet 1991, L.C.Wrobel et C.A.Brebbia (eds.), Computational Mechanics Publications, vol.2, p.207 (1991)
- CP16 BELLET, Michel, SOYRIS, Nathalie, CHENOT, Jean-Loup, 3D finite element analysis of thermomechanical processes. Application to forging and casting, Proc. IUTAM Symposium : Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications, Hanovre, Allemagne, août 1991, D.Besdo et E.Stein (eds.), Springer Verlag, pp. 389-398 (1992)
- CP17 BELLET, Michel, CORSINI, Christine, ASSAKER, Dany, MERCIER, P., WOUTERS, Paul, A numerical model of the extrusion blow molding process, Proc. ANTEC'92, Detroit (MI), USA, 3-7 mai 1992, The Society of Plastics Engineers, vol.1, p.177 (1992)
- CP18 CORSINI, Christine, PORA, Jérôme, BELLET, Michel, Superplastic forming of industrial parts : a numerical simulation, Proc. 7th World Conf. on Titanium, San Diego (CA), USA, June 28-july 2, 1992, F.H. Froes et I.L. Caplan (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pa, USA, p. 1403.
- CP19 MUTTIN, Frédéric, KIM, Yong H., COUPEZ, Thierry, BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, Lagangian finite element analysis of low viscous and inviscid free surface fluid flow. Application to metal casting flow using a remeshing technique., Proc. 1st European Computational Fluid Dynamics Conference, Bruxelles, Belgique, 7-11 septembre 1992, C.H.Hirsch, J.Périaux et W.Kordulla (eds.), Elsevier, vol.1, p.429 (1992)
- CP20 BELLET, Michel, BAY, François, BRIOIST, Jean-Jacques, CHENOT, Jean-Loup, Modelling of the thermomechanical coupling in the cooling stage of the casting process, Proc. NUMIFORM'92 Int. Conf. on Numerical Modelling of Forming Processes, Sophia Antipolis, France, 14-18 septembre 1992, J.L.Chenot, R.D.Wood et O.C.Zienkiewicz (eds.), Balkema, Rotterdam, p.771 (1992)
- CP21 SCHMIDT, Fabrice, BELLET, Michel, AGASSANT, Jean-François, Numerical simulation of polyester stretch blow molding, Proc. NUMIFORM'92 Int. Conf. on Numerical Modelling of Forming Processes, Sophia Antipolis, France, 14-18 septembre 1992, J.L.Chenot, R.D.Wood et O.C.Zienkiewicz (eds.), Balkema, Rotterdam, p.383 (1992)
- CP22 HADJEE, Y., WERBROUCK, Gildas, BAY, François, MENAI, Mamar, BELLET, Michel, Numerical simulation of solidification stage in casting process, Proc. 2nd Int. Symposium on Contribution of Scientific Computational Techniques to Car Design, Paris, 24-25 février 1993.

- CP23 BELLET, Michel, MENAI, Mamar, BAY, François, SCHMIDT, Pal et SVENSSON, Ingvar, Finite element modelling of the cooling phase in casting processes, Proc. 6th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Palm Coast, Florida, USA, 21-26 mars 1993, T.S.Piwonka, V.Voller et L.Katgerman (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp.561-568 (1993)
- CP24 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, DESOUTTER, Luc, Viscoelastic simulation of PET stretch-blow molding, Proc. 9th Annual Meeting of the Polymer Processing Society, 5-8 avril 1993, Manchester, Grande Bretagne, p.335 (1993)
- CP25 MENAI, Mamar, BAY, François, BELLET, Michel, Simulation numérique du refroidissement des pièces de fonderie, Proc. Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 11-14 mai 1993, M.Bernadou et al. (eds.), Hermès, vol.2, pp.982-991 (1993)
- CP26 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, DESOUTTER, Luc, Thermomechanical simulation of PET stretch/blow molding, Proc. PPS'94, 10th Annual Meeting of The Polymer Processing Society, avril 1994, Akron, Ohio, USA, The Polymer Processing Society, p. 313 (1994)
- CP27 FRESSE, Olivier, BELLET, Michel et MONASSE, Bernard, Finite element simulation of blown films, Proc. PPS'94, 10th Annual Meeting of The Polymer Processing Society, avril 1994, Akron, Ohio, USA, The Polymer Processing Society, p. 327 (1994)
- CP28 VANTAL, Marie-Hélène, BELLET, Michel, MONASSE, Bernard, JAMMET, Jean-Claude et ANDRO, Ronan, Non-isothermal 3D simulation of thermoforming of multilayer sheets, Proc. PPS'94, 10th Annual Meeting of The Polymer Processing Society, avril 1994, Akron, Ohio, USA, The Polymer Processing Society, p. 317 (1994)
- CP29 COCCOZ, Gilles, BELLET, Michel, LECOT, Romain, ACKERMANN, Luc et HAGGBLAD, Hans-Ake, Cold compaction of powder: experiments and simulation, Proc. PM'94, 1994 Powder Metallurgy World Congress, Paris, 6-9 juin 1994, Société Française de Métallurgie et de Matériaux et European Powder Metallurgy Association (eds.), Les Editions de Physique, vol.1, pp.709-712 (1994)
- CP30 JINKA, Ashoka, FOURMENT, Lionel et BELLET, Michel, A three-dimensional finite element simulation of hot powder forging of an automotive part, Proc. PM'94, 1994 Powder Metallurgy World Congress, Paris, 6-9 juin 1994, Société Française de Métallurgie et de Matériaux et European Powder Metallurgy Association (eds.), Les Editions de Physique, vol.1, pp.793-796 (1994)
- CP31 BELLET, Michel, DECULTIEUX, Florent, MENAI, Mamar, LEVAILLANT, Christophe, SCHMIDT, Pal et SVENSSON, Ingvar, Thermomechanical finite element analysis of a shape casting operation with experimental validation, Proc. COST 504 Conference. Advanced Casting and Solidification Technology 1994, Espoo, Finland, 12-13 september 1994, H.Kleemola et B.Pukl (eds.), The European Commission - Telecommunications, Information Industries and Innovation, Brussels, pp.105-117 (1994)
- CP32 CHENOT, Jean-Loup et BELLET, Michel, The ALE method for the numerical simulation of material forming processes, Proc. NUMIFORM'95, 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Cornell University, Ithaca (NY, USA), 18-21 juin 1995, S.-F.Shen et P.R.Dawson (eds.), Balkema, Rotterdam, pp.39-48 (1995)
- CP33 VANTAL, Marie-Hélène, MONASSE, Bernard et BELLET, Michel, Numerical simulation of the thermoforming of multi-layer polymer sheets, Proc. NUMIFORM'95, 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Cornell University, Ithaca (NY, USA), 18-21 juin 1995, S.-F.Shen et P.R.Dawson (eds.), Balkema, Rotterdam, pp.1089-1095 (1995)
- CP34 RODRIGUEZ-VILLA, Andres, AGASSANT, Jean-François et BELLET, Michel, Finite element simulation of the extrusion blow-molding process, Proc. NUMIFORM'95, 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Cornell University, Ithaca (NY, USA), 18-21 juin 1995, S.-F.Shen et P.R.Dawson (eds.), Balkema, Rotterdam, pp.1053-1058 (1995)
- CP35 JINKA, Ashoka, FOURMENT, Lionel et BELLET, Michel, Numerical simulation of hot powder forging of connecting rod, Proc. NUMIFORM'95, 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Cornell University, Ithaca (NY, USA), 18-21 juin 1995, S.-F.Shen et P.R.Dawson (eds.), Balkema, Rotterdam, pp.833-839 (1995)
- CP36 GASTON, Laurence, GLUT, Barbara, BELLET, Michel et CHENOT, Jean-Loup, An arbitrary lagrangian eulerian finite element approach to non-steady state fluid flows. Application to mould filling, Proc. 7th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Londres, 10-15 septembre 1995, M.Cross et J.Campbell (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp.163-170 (1995)
- CP37 RODRIGUEZ-VILLA, Andres, BELLET, Michel, AGASSANT, Jean-François, Rheological characterization of molten polyethylene with respect to the blow molding process, Proc. 12th Int. Congress on Rheology, Québec, 18-23 août 1996, A. Ait-Kaidi et al.(eds.), pp.695-696 (1996)
- CP38 RODRIGUEZ-VILLA, Andres, BELLET, Michel, AGASSANT, Jean-François, Numerical simulation of the blow molding process: viscoelastic behavior and remeshing techniques, Proc. PPS-12, 12th Annual Meeting of The Polymer Processing Society, 27-31 mai 1996, Sorrento, Italie, L. Nicolais et J.M. Kenny (eds.), The Polymer Processing Society, pp.423-424 (1996)
- CP39 BELLET, Michel, FOURMENT, Lionel, A finite element three-field formulation to model the hot forging of metal powders, Proc. 5th ICTP, Int. Conf. on Technology of Plasticity, 7-10 octobre 1996, Columbus, Ohio, USA, T. Altan (ed.), pp. 445-448 (1996)

- CP40 GASTON, Laurence, BELLET, Michel et CHENOT, Jean-Loup, An arbitrary Lagrangian Eulerian finite element approach to non-steady state fluid flows. Application to mould filling, Proc. ECCOMAS'96, 2nd ECCOMAS (European Community on Computational Methods in Applied Sciences) Computational Fluid Dynamics Conf., Paris, 9-13 septembre 1996, J.A.Désidéri, P.Le Tallec, E.Onate, J.Périaux et E.Stein (eds.), John Wiley et Sons, Chichester, pp. 973-979 (1996)
- CP41 BELLET, Michel, FOURMENT, Lionel, A three-field formulation for the finite element analysis of compressible viscoplasticity. Application to metal powder hot compaction, Proc. COMPLAS 5, 5th Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelona, march 17-20, E.Onate et al. (eds), pp.1270-1275 (1997)
- CP42 JAOUEN, Olivier, BELLET, Michel, Un algorithme de couplage mécanique entre corps déformables : application à l'interaction pièce-moule en condition de solidification dans le procédé de fonderie, Proc. 3ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 20-23 mai 1997, B.Peseux et al. (eds.), Presses Académiques de l'Ouest, Nantes, pp. 723-728 (1997)
- CP43 DECULTIEUX, Florent, BELLET, Michel, LE FLOC'H, Alain, DELAGNES, Denis, LEVAILLANT, Christophe, Development of stress during the solidification of an aluminium alloy : experimental and numerical assessment of influence of elasticity parameters during solidification, Proc. SP'97, 4th International Conference on Solidification Processing, Sheffield, Grande-Bretagne, 7-10 juillet 1997, J.Beech et H.Jones (eds.), The University of Sheffield, pp. 195-197 (1997)
- CP44 BELLET, Michel, Modélisation tridimensionnelle par éléments finis de la compaction à chaud des poudres métalliques par une formulation à trois champs, Actes du 13ème Congrès Français de Mécanique, Poitiers, Futuroscope, 1-5 septembre 1997, Association Universitaire de Mécanique, vol.4, pp. 55-58 (1997)
- CP45 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, Experimental study of the injection/blow molding process, Proc. ANTEC'97, Toronto, Canada, 27 avril - 2 mai (1997)
- CP46 M. BELLET, J.F. AGASSANT, B. MONASSE, M.H. VANTAL, A. RODRIGUEZ-VILLA, Simulation par éléments finis des procédés de soufflage des polymères, Proc. Conf. Eléments Finis Polymères, Nancy, 3-4 novembre 1997, C. G'Sell & J.C. Granddier (eds.), Apollor, Nancy, article 7, pp. 1-34 (2001)
- CP47 JAOUEN, Olivier et BELLET, Michel, *A numerical mechanical coupling algorithm for deformable bodies: application to part/mold interaction in casting process*, Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego (CA, USA), 7-12 juin 1998, B.G. Thomas and C. Beckermann. (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp. 739-746, 1998.
- CP48 BELLET, Michel, RODRIGUEZ-VILLA, Andres et AGASSANT, Jean-François, *Finite element and automatic remeshing methods for the simulation of complex blow molded polymer components*, in: Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications Proc. NUMIFORM'98, 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Enschede, Pays-Bas, 22-25 juin 1998, J. Huétink, F.P.T. Baaijens (eds.), Balkema, Rotterdam, pp. 489-494, 1998.
- CP49 BAHLOUL, Chantal, GASTON, Laurence et BELLET, Michel, *Finite element analysis of turbulent flow during the mould filling in casting*, in: Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications Proc. NUMIFORM'98, 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Enschede, Pays-Bas, 22-25 juin 1998, J. Huétink, F.P.T. Baaijens (eds.), Balkema, Rotterdam, pp. 641-646, 1998.
- CP50 JAOUEN, Olivier et BELLET, Michel, *Numerical modelling of part/mold interaction in casting process*, in: Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications Proc. NUMIFORM'98, 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Enschede, Pays-Bas, 22-25 juin 1998, J. Huétink, F.P.T. Baaijens (eds.), Balkema, Rotterdam, pp. 647-653, 1998.
- CP51 RODRIGUEZ-VILLA, Andres, AGASSANT, Jean-François et BELLET, Michel, *Numerical and experimental study of the blow molding process*, Proc. PPS'14, 14th Annual Meeting of the Polymer Processing Society, Yokohama, Japan, June 8-12, 1998, The Polymer Processing Society, pp. 691-692, 1998.
- CP52 CHENOT, Jean-Loup et BELLET, Michel, *Finite element modelling of metal forming processes: fluid and solid approaches*, ACAM Conference, Australia, 1999.
- CP53 BELLET, Michel, AGASSANT, Jean-François, MONASSE, Bernard, RODRIGUEZ-VILLA, Andres, LEBOUVIER, Daniel, FONTAINE DE GHELIN, Olivier, WOUTERS, Paul, *Finite element simulation of thermoforming and extrusion blow-molding processes*, Proc. Numisheet'99, 4th Int. Conf. on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes, Besançon, France, 13-17 septembre 1999, J.C. Gélén & P. Picart (eds.), Université de Franche-Comté et ENSMM Besançon, pp. 555-560, 1999.
- CP54 BELLET, Michel, JAOUEN, Olivier, Modelling of the mechanical phenomena in casting, International Symposium on « Modelling of microstructures and solidification process », Journées d'Automne de la Société Française de Métallurgie et de Matériaux, Paris, 3 novembre 1999, Revue de Métallurgie, Cahiers d'Informations Techniques, numéro hors série, p. 33, 1999.
- CP55 BELLET, Michel, JAOUEN, Olivier, Finite element approach of thermomechanics of solidification processes, Proc. Int. Conf. On Cutting Edge of Computer Simulation of Solidification and Casting, Osaka (Japon), November 14-16, 1999, I. Ohnaka & H. Yasuda (eds.), The Iron and Steel Institute of Japan (ISIJ), pp. 173-190, 1999.
- CP56 BELLET, Michel, ALIAGA, Charles, JAOUEN, Olivier, Finite elements for a thermomechanical analysis of solidification processes, Proc. MCWASP IX, 9th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Aachen (Allemagne), 20-25 août 2000, P.R. Sahm, P.N. Hansen & J.G. Conley (eds.), Shaker Verlag, Aachen, pp. 10-17, 2000.

- CP57 BILLON, Noëlle, BELLET, Michel, HAUDIN, Jean-Marc, AGASSANT, Jean-François, Blow moulding and thermoforming of polymers, Proc. 4th Int. ESAFORM Conf. on Material Forming, Liège (Belgique), 23-25 avril 2001, Université de Liège, vol. 1, pp. 341-344 (2001)
- CP58 BELLET, Michel, MOTO MPONG, Serge, Determination of the constitutive equation parameters of a thixotropic Al alloy and FEM modelling of the thixoforming process, in Simulation of Material Processing: Theory, Methods and Applications, Proc. NUMIFORM'2001, 7th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Toyohashi, Japon, 18-20 juin 2001, K. Mori (ed.), Balkema, Lisse, pp. 1087-1092, 2001.
- CP59 HEINRICH, F. COSTES, M. BELLET, Two-dimensional thermomechanical simulation of the secondary cooling zone of steel continuous casting, Proc. 5th ESAFORM Conf. on Material Forming, Cracovie, 14-17 avril 2002, M. Pietrzyk, Z. Mitura, J. Kaczmar (eds.), Akapit, Cracovie, 355-358 (2002)
- CP60 E. MASSONI, R. FORESTIER, T DAL NEGRO, Y. CHASTEL, M. BELLET, Inverse analysis for the identification of thermal and mechanical parameters of materials, Proc. 5th ESAFORM Conf. on Material Forming, Cracovie, 14-17 avril 2002, M. Pietrzyk, Z. Mitura, J. Kaczmar (eds.), Akapit, Cracovie, 159-162 (2002)
- CP61 MASSONI E, BERGER S, BOUDE S, BELLET M, *Inverse model for automatic identification of material parameters in superplastic sheet forming*, Proceedings of the 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D sheet forming Processes, NUMISHEET 2002, Jeju Island, Corée du Sud, Vol. 1, 219 (2002)
- CP62 M. BELLET, H. ABOUCHADI, M. LAMBERTIN, O. JAOUEN, I. POITRAULT, Simulation de la formation de la retassure primaire et des lames d'air dans les pièces de fonderie par une analyse thermomécanique 3D éléments finis, Colloque Matériaux 2002, Tours, 21-25 octobre 2002, Proc: CDROM édité par l'Université Technologique de Belfort-Montbéliard, 4 pages (2002)
- CP63 F. COSTES, A. HEINRICH, M. BELLET, Modélisation par éléments finis 3D de la coulée continue d'acier, Colloque Matériaux 2002, Tours, 21-25 octobre 2002, Proc: CDROM édité par l'Université Technologique de Belfort-Montbéliard, 4 pages (2002)
- CP64 BELLET Michel, FOURMENT, Lionel, CORSINI, Christine, PARIS, Laurent, CAUSSAT, Jean-Jacques, SPENCE, Julian, Superplastic forming: from numerical modelling to automated process optimization, Proc. EURO-SPF 01, 1st European Conf. on Superplastic Forming, Villars-de-Lans, France, 17-19 mai 2001, J.-J. Blandin (ed.), Presses Universitaires de Grenoble, pp. 11-17 (2003)
- CP65 FACHINOTTI Victor D., BELLET Michel, Three-Dimensional Finite Element Modelling of Thermomechanics and Macrosegregation in Binary Alloys Solidification, Proc. ESAFORM 6th Int. Conf. on Material Forming, Salerne (Italie), 28-30 avril 2003, Université de Salerne, pp. 511-514, 2003.
- CP66 S. LE CORRE, M. BELLET, F. BAY, Y. CHASTEL, Two-phase approach for solidification problems: modelling the mushy zone deformation, Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D.M. Stefanescu, J.A. Warren, M.R. Jolly & M.J.M. Krane (eds.), The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA, pp. 345-352, 2003.
- CP67 M. BELLET, V. FACHINOTTI, O. JAOUEN, S. DE LA CHAPELLE, I. POITRAULT, Application of the arbitrary Eulerian Lagrangian finite element formulation to the thermomechanical simulation of casting processes, with focus on pipe shrinkage prediction, Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D.M. Stefanescu, J.A. Warren, M.R. Jolly & M.J.M. Krane (eds.), The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA, pp. 361-368, 2003.
- CP68 F. COSTES, A. HEINRICH, M. BELLET, 3D thermomechanical simulation of the secondary cooling zone of steel continuous casting, Proc. MCWASP X, 10th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Destin (Floride, USA), 25-30 mai 2003, D.M. Stefanescu, J.A. Warren, M.R. Jolly & M.J.M. Krane (eds.), The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, USA, pp. 393-400, 2003.
- CP69 V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, Modélisation tridimensionnelle par éléments finis de la macroségrégation au cours de la solidification d'un alliage binaire, Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 septembre 2003, CDROM, Université de Nice - Sophia Antipolis, Ecole des Mines de Paris, Association Française de Mécanique, 6 pages, 2003.
- CP70 F. COSTES, A. HEINRICH, M. BELLET, Approche thermomécanique 3D de la coulée continue d'acier, Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 septembre 2003, CDROM, Université de Nice - Sophia Antipolis, Ecole des Mines de Paris, Association Française de Mécanique, 6 pages, 2003.
- CP71 M. BELLET, E. SAEZ, O. JAOUEN, T. COUPEZ, A 3D-FEM solver for non steady state Navier-Stokes equations with free surface. Application to mold filling simulation in casting processes, Proc. Symposium on Multiphase Phenomena and CFD Modelling and Simulation in Materials Processes, TMS Annual Meeting, Charlotte (NC, USA) mars 2004, L. Nastac, B.Q. Li (eds.), The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, PA, USA (2004) 209-218.
- CP72 M. BELLET, V.D. FACHINOTTI, S. GOUTTEBROZE, W. LIU, H. COMBEAU, A 3D-FEM model solving thermomechanics and macrosegregation in binary alloys solidification, Proc. Symposium on Solidification Processes and Microstructures, in Honor of Wilfried Kurz, TMS Annual Meeting, Charlotte (NC, USA) mars

- 2004, M. Rappaz, C. Beckermann & R. Trivedi (eds.), The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, Pennsylvanie, USA (2004) 41-46.
- CP73 S. GOUTTEBROZE, V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, H. COMBEAU, 3D-FEM modeling of macrosegregation in solidification of binary alloys, Proc. ESAFORM 7th Int. Conf. on Material Forming, Trondheim (Norway), 28-30 avril 2004, S. Stören (ed.), Norwegian University of Science and Technology (2004) 421-424.
- CP74 C. CHAMPIN, M. BELLET, F.M. SCHMIDT, J.F. AGASSANT, Y. LE MAOULT, G. DENIS, 3D finite element modeling of the stretch blow molding process, Proc. PPS-20, 20th Annual Meeting of the Polymer Processing Society, Akron (Ohio, USA), 20-24 juin 2004, CDROM, The University of Akron (2004) 15 pages.
- CP75 S. LE CORRE, M. BELLET, Two-phase modeling of metals solidification: a numerical approach for the thermo-mechanical problem, Proc. NUMIFORM'2004, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus (OH, USA), 13-17 juin 2004, S. Ghosh, J.M. Castro & J.K. Lee (eds.), American Institute of Physics, New York (2004) 1185-1190.
- CP76 V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, A diffusion-split method to deal with thermal shocks using standard linear tetrahedral finite elements, Proc. NUMIFORM'2004, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus (OH, USA), 13-17 juin 2004, S. Ghosh, J.M. Castro & J.K. Lee (eds.), American Institute of Physics, New York (2004) 2258-2263.
- CP77 M. BELLET, E. MASSONI, S. BOUDE, Finite element modelling of superplastic sheet forming processes. Identification of rheological and tribological parameters by inverse method, Proc. NUMIFORM'2004, 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus (OH, USA), 13-17 juin 2004, S. Ghosh, J.M. Castro & J.K. Lee (eds.), American Institute of Physics, New York (2004) 1142-1147.
- CP78 V.D. FACHINOTTI, M. BELLET, A diffusion-split method to deal with thermal shocks using standard linear tetrahedral finite elements, Proc. ECCOMAS 2004, 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering., Jyväskylä (Finland), 24-28 juillet 2004, P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux & D. Knörzer (eds.), CDROM ISBN 951-39-1869-6, 12 pages (2004)
- CP79 M. BELLET, S. LE CORRE, V. D. FACHINOTTI, A 2-phase finite element model to study concurrent fluid flow and solid deformation occurring in mushy zones during the solidification of metallic alloys, Proc. S2P, Int. Conf. on Semi-Solid Processing of Alloys and Composites, Limassol, Chypre, 21-23 septembre 2004, D. Apelian & A. Alexandrou (eds.), CDROM publié par l'Université de Chypre et le Worcester Polytechnic Institute (USA), 9 pages (2004)
- CP80 G. MARIN, T. BILLAUDEAU, E. MASSONI, M. BELLET, S. BOUDE, L. PARIS, Tribological parameter identification and assessment of necking criterion in superplastic forming, Proc. EURO-SPF 2004, 3rd European Conference on Superplastic Forming, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, France, 7-9 juillet 2004, G. Bernhart, T. Cutard, P. Lours (eds.), Cépaduès Editions, Toulouse (2004) 101-106.
- CP81 N. TRIOLET, M. BOBADILLA, M. BELLET, Thermomechanical modeling of steel slab continuous casting : a useful tool to optimize process actuators. Proc. Journées Sidérurgiques Internationales, Paris, 9-10 décembre 2004, Association Technique de la Sidérurgie.
- CP82 C. CHAMPIN, M. BELLET, F. M. SCHMIDT, J.F. AGASSANT, Y. LE MAOULT, 3D finite element modeling of the blow molding process, Proc. ESAFORM 2005 8th Conf. on Material Forming, Cluj-Napoca (Roumanie), avril 2005, vol. 2, The Romanian Academy Publishing House, Bucarest (2005) 905-908.
- CP83 N. TRIOLET, M. BOBADILLA, L. AVEDIAN, M. BELLET, The thermomechanical modeling of steel slab continuous casting: a useful tool to adapt process actuators, Proc. ECCC2005 5th European Conference on Continuous Casting, Nice, 20-22 juin 2005, J.Y. Lamant et al. (eds.), Association Technique de la Sidérurgie Française (2005).
- CP84 S. GOUTTEBROZE, M. BELLET, H. COMBEAU, 3D-FEM macrosegregation simulation on large steel ingots with adaptive anisotropic remeshing, Proc. ICCHMT, Paris, juin 2005.

12.7 COMMUNICATIONS A DES CONGRES, SANS ACTES

- C1 BELLET, Michel, COMBRES, Yves, LEVAILLANT, Christophe, CHENOT, Jean-Loup, A finite element model for superplastic forming, ASME Fall Meeting, Cincinnati (OH), USA, octobre 1987
- C2 BELLET, Michel, Modélisation par éléments finis de la mise en forme des métaux à chaud, Journée GAMNI/SMIAI "Modélisation numérique des solides viscoélastiques ou viscoplastiques en grandes déformations", Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 19 décembre 1990.
- C3 BELLET, Michel, MASSONI, Elisabeth, CHENOT, Jean-Loup, Finite element modelling of sheet forming processes, Workshop USA/France on The Numerical Simulation of Metal Forming Processes, Cornell University, Ithaca (NY), USA, 12-14 mai 1992
- C4 SCHMIDT, Fabrice, AGASSANT, Jean-François, BELLET, Michel, DENIS, Gérard, Etude et modélisation de l'étréage-soufflage de bouteilles en PET, Colloque National Matériaux - Science et Industrie, La Vilette, Paris, 11-12 juin 1992.
- C5 BELLET, Michel, Finite element modelling of Hot Powder Compaction, International Workshop on Modelling of Metal Powder Forming Processes, Grenoble, France, 21-23 juillet 1997.

12.8 DIVERS

- D1 BELLET, Michel, Modélisation numérique du formage superplastique de tôles, Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, soutenue le 4 mars 1988. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1988)
- D2 BELLET, Michel, MONTMITONNET, Pierre, MASSONI, Elisabeth et CHENOT, Jean-Loup, Séminaire de Plasticité et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 17-21 septembre 1990, Ecole des Mines de Paris (1990)
- D3 BELLET, Michel, Mécanique et thermique des milieux continus, Séminaire de Plasticité et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 17-21 septembre 1990, BELLET, Michel, P.Montmitonnet, E.Massoni et J.L.Chenot (eds.), Ecole des Mines de Paris, vol.1, chap.1 (1990)
- D4 BELLET, Michel et LEVAILLANT, Christophe, Ductilité en mise en forme des métaux, Séminaire de Plasticité et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 17-21 septembre 1990, BELLET, Michel, P.Montmitonnet, E.Massoni et J.L.Chenot (eds.), Ecole des Mines de Paris, vol.1, chap.5 (1990)
- D5 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, FOURMENT, Lionel, MASSONI, Elisabeth et MONTMITONNET, Pierre, Séminaire de Plasticité. Eléments Finis et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 26-30 septembre 1994, Ecole des Mines de Paris (1994)
- D6 BELLET, Michel, Mécanique et thermique des milieux continus, Séminaire de Plasticité. Eléments Finis et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 26-30 septembre 1994, BELLET, Michel, J.L.Chenot, L.Fourment, E.Massoni et P.Montmitonnet (eds.), Ecole des Mines de Paris, vol.1, chap.1 (1994)
- D7 BELLET, Michel, Simulation numérique de la compaction des poudres métalliques, Séminaire de Plasticité. Eléments Finis et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 26-30 septembre 1994, BELLET, Michel, J.L.Chenot, L.Fourment, E.Massoni et P.Montmitonnet (eds.), Ecole des Mines de Paris, vol.3, chap.15 (1994)
- D8 BELLET, Michel, Méthodes eulériennes-lagrangiennes. Application au remplissage de moules en fonderie, Séminaire de Plasticité. Eléments Finis et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 26-30 septembre 1994, BELLET, Michel, J.L.Chenot, L.Fourment, E.Massoni et P.Montmitonnet (eds.), Ecole des Mines de Paris, vol.3, chap.19 (1994)
- D9 BELLET, Michel, Modélisation numérique de la mise en forme des métaux, Séminaire invité, Département des Matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 20 mars 1998.
- D10 BELLET, Michel, Simulation par éléments finis des procédés de soufflage des polymères: thermoformage, extrusion-soufflage, Séminaire invité, Département des Matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 27 mars 1998.
- D11 BELLET, Michel, Modélisation par éléments finis de la compaction des poudres métalliques, Séminaire invité, Département des Matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 24 avril 1998.
- D12 BELLET, Michel, L'apport de la simulation numérique dans les procédés de mise en forme des matériaux, Journée Industrielle "La Voiture de Demain", Ecole des Mines de Paris, 11 mars, 1999.
- D13 BELLET, Michel, Mise en forme des matériaux : simulation numérique par éléments finis, Séminaire invité, Départements Mécanique et Matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 15 avril 1999.
- D14 BELLET, Michel, Simulation de la fonderie: quelques développements en cours au Cemef, Séminaire invité, Réunion du Club des Utilisateurs THERCAST®, Saint-Etienne, 8 mars 2002.
- D15 BELLET, Michel, Thermomécanique et solidification : travaux récents du Cemef, Séminaire invité, Réunion du Club des Utilisateurs THERCAST®, Saint-Etienne, 7 octobre 2003.
- D16 M. BELLET, Modélisation numérique des procédés de solidification, Séminaire invité, Institut National Polytechnique de Grenoble, laboratoire EPM-Madylam, 1^{er} octobre 2004.
- D17 BELLET, Michel, THERCAST®: quelques développements récents, Séminaire invité, Réunion du Club des Utilisateurs THERCAST®, Saint-Etienne, 11 janvier 2005.
- D18 M. BELLET, Numerical modelling of solidification processes, Séminaire invité, Université Polytechnique de Catalogne (CIMNE), Barcelone, 6 mai 2005.

12.9 ORGANISATION DE CONFERENCES, COLLOQUES ET SEMINAIRES

- O1 BELLET, Michel, MONTMITONNET, Pierre, MASSONI, Elisabeth et CHENOT, Jean-Loup, Séminaire de Plasticité et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 17-21 septembre 1990.
- O2 BELLET, Michel, CHENOT, Jean-Loup, FOURMENT, Lionel, MASSONI, Elisabeth et MONTMITONNET, Pierre, Séminaire de Plasticité. Eléments Finis et Mise en Forme des Métaux, Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Sophia Antipolis, France, 26-30 septembre 1994.

- O3 BELLET, Michel, RASTY, J., ESDA'96 ASME Engineering Systems Design and Analysis Conference, Montpellier, France, 1-4 juillet 1996. Co-direction du symposium "Manufacturing-Metal Forming". Co-éditeur des proceedings : vol.3 Composite Materials - Manufacturing - Fatigue/Fracture, The American Society of Mechanical Engineers, New York, USA.
- O4 GANDIN, Charles-André, BELLET, Michel, ALLISON, John, MCWASP XI, 11th Int. Conf. on Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, Opio, France, 28 mai – 2 juin 2006.

13 TRAVAUX ENCADRES

13.1 THESES

- TH1 KAMARA Alima. Contribution à la modélisation par éléments finis des écoulements turbulents. Application au remplissage en fonderie. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 4 février 1994.
- TH2 VANTAL Marie-Hélène. Etude numérique et expérimentale du thermoformage de polymères. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 9 janvier 1995.
- TH3 MENAI Mamar. Simulation numérique tridimensionnelle du refroidissement des pièces de fonderie: approche thermomécanique. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 28 mars 1995.
- TH4 SCHMIDT Fabrice. Etude expérimentale et modélisation du procédé d'injection/soufflage bi-orientation en cycle froid de bouteilles en PET. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 7 juin 1995.
- TH5 COCCOZ Gilles. Compactage à froid des poudres métalliques : approche expérimentale et simulation numérique. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 24 novembre 1995.
- TH6 BRIOIST Jean-Jacques. Un modèle thermomécanique du refroidissement des pièces moulées. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 18 décembre 1995.
- TH7 GASTON Laurence. Simulation numérique par éléments finis bidimensionnels du remplissage de moules de fonderie et étude expérimentale sur maquette hydraulique. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 13 février 1997.
- TH8 RODRIGUEZ-VILLA Andres. Etude théorique et expérimentale de l'extrusion-soufflage de corps creux en polymère. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 27 octobre 1997.
- TH9 JAUOEN Olivier. Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermomécanique du refroidissement des pièces coulées. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 4 décembre 1998.
- TH10 BAHLOUL-MASSIP Chantal. Etude numérique des phénomènes thermomécaniques pour la simulation tridimensionnelle du remplissage des moules de fonderie. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 8 décembre 2000.
- TH11 LEFEVRE Xavier. Analyse mécanique par la méthode des éléments finis de reconstitutions coronoradicales. Thèse de Doctorat en Sciences Physiques, Université de Nice - Sophia Antipolis, 31 octobre 2001.
- TH12 MOTO M'PONG Serge. Etude rhéologique et simulation numérique de l'injection d'un alliage d'aluminium à l'état semi-solide. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 12 décembre 2002.
- TH13 SAEZ Estelle. Etude numérique du remplissage 3D en fonderie. Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris, 8 septembre 2003.
- TH14 HEINRICH Alban. Modélisation thermomécanique de la coulée continue d'acier en deux dimensions. Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 30 octobre 2003.
- TH15 COSTES Frédéric. Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers. Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris, 26 mai 2004.
- TH16 LIU Weitao. Finite element modelling of macrosegregation and thermomechanical phenomena in solidification processes (Modélisation par éléments finis des phénomènes thermomécaniques et de macroségrégation dans les procédés de solidification). Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique, Ecole des Mines de Paris, 9 juin 2005.

13.2 MASTERES SPECIALISES

- M1 DANET Marianne. Etude du formage superplastique d'alliages d'aluminium. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 1990.
- M2 ANDRO Ronan. Thermoformage des polymères : approche numérique et expérimentale. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 1991.

- M3 BERGOUNHON Patrice. Modélisation par éléments finis du pressage des paraisons de verre. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 1994.
- M4 NGUYEN-NGOC Tran. Etude rhéologique de polymères sur machine de soufflage. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 1997.
- M5 GUILLOT Cyril. Modélisation thermomécanique du refroidissement des pièces de fonderie, étude de disques de frein en fonte. Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2000.
- M6 TRIOLET Nicolas. Conception d'un essai instrumenté pour l'identification de résistances thermiques de contact pour les applications fonderie et forge. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 2001.
- M7 BARROIS Sébastien. Méthodes inverses pour l'identification de résistances thermiques de contact pour les applications fonderie et forge. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 2001.
- M8 BERGER Stéphane. Simulation numérique du formage superplastique : identification des paramètres rhéologiques par analyse inverse. Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2002.
- M9 PACCINI Audrey. Modélisation du comportement thermomécanique de la peau solide formée en lingotière de coulée continue. Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2002.
- M10 BOUREL Benjamin. Etude du compactage de mélanges de charges pour générateur de gaz. stage Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2003.
- M11 DUNEIGRE Nadège. Caractérisation et simulation de la coulée continue. Mastère Matériaux & Mise en Forme. Septembre 2003.
- M12 MEULAND Christophe. Prise en compte de la solidification lors de la simulation du remplissage des moules de fonderie. Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2003.
- M13 PETIT Caroline. Simulation du formage superplastique : identification du frottement par analyse inverse. Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2003.
- M14 MARINI Fabien. Etude de la modélisation des conditions aux limites thermiques en coulée continue de brames d'acier Mastère Mécanique Numérique. Septembre 2004.